Gesamtpunktzahl: **20 Punkte**

Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu)

Aufgabe 1: Kontinuierliche Basis für δ-förmiges Potential **3+2+3 = 8 Punkte**

Wir betrachten ein Potential der Form $V(x) = -V_0\delta(x)$ mit $V_0 > 0$.

(a) Für $E < 0$ existiert ein gebundener Zustand. Zeigen Sie, dass dieser gegeben ist durch

$$\varphi_0(x) = \sqrt{\rho}e^{-\rho|x|} \qquad \text{mit} \qquad \rho = \frac{mV_0}{\hbar^2}\,.$$

Neben der Stetigkeit von $\varphi(x)$ benötigen Sie hier als weitere für δ-Distributionen charakteristische Anschlussbedingung den endlichen Sprung in der Ableitung $\varphi'(0^+) - \varphi'(0^-) = -\frac{2mV_0\varphi(0)}{\hbar^2}$. Motivieren Sie diese durch Integration der Schrödingergleichung über $\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx$ mit anschließendem Grenzübergang $\epsilon \to 0$. Es ist $0^\pm = 0 \pm \epsilon$.

(b) Für Streuzustände mit $E > 0$ benötigen wir noch von links und von rechts einlaufende Wellen, $\varphi_p^l(x)$ und $\varphi_p^r(x)$. Diese folgen gemäß der Ihnen bekannten Berechnung von Transmission und Reflexion und seien in dieser Aufgabe vorgegeben durch

$$\varphi_p^l(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \begin{cases} e^{ipx/\hbar} - \frac{1}{1+i\kappa}e^{-ipx/\hbar} & \text{für} \quad x \leq 0 \\ \frac{i\kappa}{1+i\kappa}e^{ipx/\hbar} & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

mit $p = \sqrt{2mE}$ und $\kappa = \frac{p}{\rho\hbar}$. Bestimmen Sie $\varphi_p^r(x)$ aus $\varphi_p^l(x)$ durch Symmetrieüberlegungen. Tatsächlich bilden der gebundene und die Streuzustände ein kontinuierliches Orthonormalsystem. Zeigen Sie die Relationen

$$\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle = 1\,, \qquad \left\langle\varphi_0|\varphi_p^l\right\rangle = 0\,.$$

Das Skalarprodukt im Funktionenraum ist gegeben durch $\langle f_1|f_2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx f_1^*(x)f_2(x)$. *Hinweis:* Nutzen Sie $\int_0^\infty dx e^{ikx} = \frac{i}{k} + \pi\delta(k)$. Es gilt auch $\left\langle\varphi_0|\varphi_p^r\right\rangle = 0$, $\left\langle\varphi_p^l|\varphi_{p'}^l\right\rangle = \delta(p-p')$, $\left\langle\varphi_p^r|\varphi_{p'}^r\right\rangle = \delta(p-p')$ und $\left\langle\varphi_p^l|\varphi_{p'}^r\right\rangle = 0$, aber diese Rechnungen seien uns erspart.

(c) Zeigen Sie für den Fall $x > 0$ und $x' > 0$, dass das System vollständig ist, also dass

$$\varphi_0(x)\varphi_0(x') + \int_0^\infty dp\varphi_p^{l*}(x)\varphi_p^l(x') + \int_0^\infty dp\varphi_p^{r*}(x)\varphi_p^r(x') = \delta(x-x')\,.$$

Hinweis: Nützliche Integrale sind $\int_0^\infty dx\frac{\cos(ax)}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-|a|}$ und $\int_0^\infty dx\frac{x\sin(bx)}{1+x^2} = \text{sign}(b)\frac{\pi}{2}e^{-|b|}$.

Lösung der Aufgabe 1

(a) Zuerst einmal ergibt sich als Schrödingergleichung getrennt für $x > 0$ und $x < 0$ die bereits bekannte Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho^2\right)\varphi(x) = 0$$

mit $\rho = \sqrt{-2mE/\hbar^2}$ und $E < 0$. Die beschränkten(!) Lösungen dieser Gleichung sind

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} A_1 e^{\rho x} & \text{für} \quad x < 0 \\ A_2 e^{-\rho x} & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}.$$

Um die Anschlussbedingung für die Ableitung $\varphi'(x)$ zu ermitteln, integriert man die Schrödingergleichung von $-\epsilon$ bis ϵ und erhält

$$\begin{aligned} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - V_0 \delta(x) \right) \varphi(x) dx &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} E \varphi(x) dx \\ \Rightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\varphi'(\epsilon) - \varphi'(-\epsilon) \right) - V_0 \varphi(0) &= E \varphi(\xi) 2\epsilon \,. \end{aligned}$$

mit $\xi \in [-\epsilon, \epsilon]$. Somit folgt im Limes $\epsilon \to 0$

$$\varphi'(0^+) - \varphi'(0^-) = -\frac{2mV_0\varphi(0)}{\hbar^2} \,.$$

Die Ableitung macht also einen endlichen Sprung definierter Größe. Insgesamt folgt so

$$\begin{aligned} &\varphi(0^+) = \varphi(0^-) \quad \Rightarrow \quad A_1 = A_2 =: A \\ &\varphi'(0^+) - \varphi'(0^-) = -\frac{2mV_0\varphi(0)}{\hbar^2} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{V_0 m}{\hbar^2} \quad \text{bzw.} \quad E = -\frac{V_0^2 m}{2\hbar^2} < 0 \,. \end{aligned}$$

Die Normierung von $\varphi(x)$ liefert außerdem $A = \sqrt{\rho}$, denn

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\varphi(x)|^2 = \int_{-\infty}^{0} dx A^2 e^{2\rho x} + \int_{0}^{\infty} dx A^2 e^{-2\rho x} = \frac{A^2}{2\rho} + \frac{A^2}{2\rho} = \frac{A^2}{\rho} \stackrel{!}{=} 1 \,.$$

Also ist $\varphi_0(x) = \sqrt{\rho} e^{-\rho|x|}$.

(b) Aus Symmetrieüberlegungen folgt für die von rechts einlaufenden Lösungen durch $x \to -x$

$$\varphi_p^r(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \begin{cases} \frac{i\kappa}{1+i\kappa} e^{-ipx/\hbar} & \text{für} \quad x \leq 0 \\ e^{-ipx/\hbar} - \frac{1}{1+i\kappa} e^{ipx/\hbar} & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}.$$

In dieser Teilaufgabe ist nun die Orthonormalität des gebundenen und der Streuzustände zu zeigen. Wir starten mit $\langle \varphi_0 | \varphi_0 \rangle = 1$, welches wir schon durch die Normierung in Teilaufgabe (a) garantiert haben. Des Weiteren ist

$$\begin{aligned} \left\langle \varphi_0 | \varphi_p^l \right\rangle &= \sqrt{\frac{\rho}{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{0} dx \left[e^{\rho x + ipx/\hbar} - \frac{1}{1+i\kappa} e^{\rho x - ipx/\hbar} \right] + \sqrt{\frac{\rho}{2\pi\hbar}} \int_{0}^{\infty} dx \frac{i\kappa}{1+i\kappa} e^{-\rho x + ipx/\hbar} \\ &= \sqrt{\frac{\rho}{2\pi\hbar}} \int_{0}^{\infty} dx \left[e^{ix(i\rho - p/\hbar)} - \frac{1}{1+i\kappa} e^{ix(i\rho + p/\hbar)} + \frac{i\kappa}{1+i\kappa} e^{ix(i\rho + p/\hbar)} \right] \end{aligned}$$

Wir benutzen die angegeben Beziehung zur Berechnung des Integrals, können den Anteil der δ-Distribution aber streichen, denn das Argument derselben ist nie Null. So bleibt

$$\begin{aligned} \left\langle \varphi_0 | \varphi_p^l \right\rangle &= \sqrt{\frac{\rho}{2\pi\hbar}} \left[\frac{i}{i\rho - p/\hbar} - \frac{1}{1+i\kappa} \frac{i}{i\rho + p/\hbar} + \frac{i\kappa}{1+i\kappa} \frac{i}{i\rho + p/\hbar} \right] \\ &= \sqrt{\frac{\rho}{2\pi\hbar}} \frac{i(i\rho + p/\hbar)(1+i\kappa) - i(i\rho - p/\hbar) - \kappa(i\rho - p/\hbar)}{(1+i\kappa)(i\rho - p/\hbar)(i\rho + p/\hbar)} \\ &= \sqrt{\frac{\rho}{2\pi\hbar}} \frac{-i\rho\kappa + i\rho\kappa - \kappa^2\rho + i\rho\kappa - i\rho\kappa + \kappa^2\rho}{(1+i\kappa)(i\rho - p/\hbar)(i\rho + p/\hbar)} = 0 \,. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir in der letzten Zeile $p = \kappa\rho\hbar$ benutzt.

(c) Zuletzt möchten wir zeigen, dass der gebundene Zustand und die Streuzustände als Orthonormalsystem auch die Vollständigkeitsrelation erfüllen. Dazu benötigen wir insbesondere die Integrale über die Momenta. Der gesamte Integrand für $x > 0$ ergibt sich zu

$$
\begin{aligned}
&\varphi_p^{l*}(x)\varphi_p^l(x') + \varphi_p^{r*}(x)\varphi_p^r(x') \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar}\left[e^{-ipx/\hbar} - \frac{1}{1-i\kappa}e^{ipx/\hbar}\right]\left[e^{-ipx'/\hbar} - \frac{1}{1+i\kappa}e^{-ipx'/\hbar}\right] + \frac{\kappa^2}{(1-i\kappa)(1+i\kappa)}e^{ip(x-x')/\hbar} \\
&= \frac{1}{\pi\hbar}\left[\tfrac{1}{2}e^{ip(x-x')/\hbar} + \tfrac{1}{2}e^{-ip(x-x')/\hbar} - \frac{(\cos(p(x+x')/\hbar) + \kappa\sin(p(x+x')/\hbar))}{1+\kappa^2}\right].
\end{aligned}
$$

Der letztere Term berechnet sich unter Beachtung von $p = \kappa\rho\hbar$ mit Hilfe der Formeln auf dem Übungsblatt zu

$$
-\frac{\rho}{\pi}\int_0^\infty d\kappa \frac{\cos(\rho\kappa(x+x')) + \kappa\sin(\rho\kappa(x+x'))}{1+\kappa^2} = -\frac{\rho}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}e^{-\rho(x+x')} + \frac{\pi}{2}e^{-\rho(x+x')}\right] = -\rho e^{-\rho(x+x')}.
$$

Die Integration über die ersten beiden Terme lässt sich wieder mit Hilfe der Beziehung der letzten Teilaufgabe lösen und so bleibt von diesen

$$
\frac{1}{2\pi\hbar}\left[\frac{i\hbar}{x-x'} - \frac{i\hbar}{x-x'} + \pi\delta\left(\frac{x-x'}{\hbar}\right) + \pi\delta\left(-\frac{x-x'}{\hbar}\right)\right] = \delta(x-x').
$$

Da zuletzt auch $\varphi_0(x)\varphi_0(x') = \rho e^{-\rho(x+x')}$ folgt in der Summe

$$
\varphi_0(x)\varphi_0(x') + \int_0^\infty dp\varphi_p^{l*}(x)\varphi_p^l(x') + \int_0^\infty dp\varphi_p^{r*}(x)\varphi_p^r(x') = \delta(x-x').
$$

Aufgabe 2: Basistransformationen **1+1+2 = 4 Punkte**

In einem zweidimensionalen komplexen Hilbert-Raum mit normierten Basisvektoren $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ sei ein hermitescher Operator M definiert durch $M|+\rangle = |+\rangle$, $M|-\rangle = -|-\rangle$, $\langle+|-\rangle = 0$.

(a) Wie lautet M in der Basis $|+\rangle, |-\rangle$?

(b) Wir definieren $|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + i|-\rangle)$ und $|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - i|-\rangle)$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für $M = +1, M = -1$ jeweils in den beiden Zuständen $|1\rangle$ und $|2\rangle$? *Hinweis:* Offenbar sind die betragsquadrierten Entwicklungskoeffizienten in der Eigenbasis $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ zu berechnen.

(c) Zeigen Sie explizit, dass $|1\rangle$ und $|2\rangle$ orthonormal sind. Bestimmen Sie die unitäre Transformationsmatrix U, die $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ in $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ überführt. In welche Matrix N wird M durch U transformiert?

Lösung der Aufgabe 2

(a) Die Zustände sind orthonormiert, daher gilt sowohl $\langle+|-\rangle = 0$ wie auch $\langle+|+\rangle = \langle-|-\rangle = 1$. Damit können wir direkt die Matrixelemente in der Basis berechnen

$$
\begin{aligned}
M_{11} &= \langle+|M|+\rangle = \langle+|+\rangle = 1, \qquad & M_{12} &= \langle+|M|-\rangle = -\langle+|-\rangle = 0 \\
M_{21} &= \langle-|M|+\rangle = \langle-|+\rangle = 0, \qquad & M_{22} &= \langle-|M|-\rangle = -\langle-|-\rangle = -1.
\end{aligned}
$$

Somit nimmt der Operator in der angegebenen Basis die nachfolgende Form an:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

(b) Wir haben nun die Zustände $|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + i\,|-\rangle)$ und $|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - i\,|-\rangle)$ gegeben. Die gefragten Wahrscheinlichkeiten ergeben sich aus der Berechnung der Entwicklungskoeffizienten in der Eigenbasis von M. Daher ist im Zustand $|1\rangle$:

$$\begin{aligned} P_+ &= |\langle +|1\rangle|^2 = \frac{1}{2}\,|\langle +|+\rangle + i\,\langle +|-\rangle|^2 = \frac{1}{2} \\ P_- &= |\langle -|1\rangle|^2 = \frac{1}{2}\,|\langle -|+\rangle + i\,\langle -|-\rangle|^2 = \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

In äquivalenter Weise folgt in Zustand $|2\rangle$:

$$\begin{aligned} P_+ &= |\langle +|2\rangle|^2 = \frac{1}{2}\,|\langle +|+\rangle - i\,\langle +|-\rangle|^2 = \frac{1}{2} \\ P_- &= |\langle -|2\rangle|^2 = \frac{1}{2}\,|\langle -|+\rangle - i\,\langle -|-\rangle|^2 = \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

(c) Wir prüfen die Orthonormalität der Vektoren $|1\rangle$ und $|2\rangle$ und erhalten

$$\begin{aligned} \langle 1|2\rangle &= \frac{1}{2}\left(\langle +| - i\,\langle -|\right)\left(|+\rangle - i\,|-\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\langle +|+\rangle - i\,\langle +|-\rangle - i\,\langle -|+\rangle - \langle -|-\rangle\right) = \frac{1}{2}(1-1) = 0 = \langle 2|1\rangle \\ \langle 1|1\rangle &= \frac{1}{2}\left(\langle +| - i\,\langle -|\right)\left(|+\rangle + i\,|-\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\langle +|+\rangle + i\,\langle +|-\rangle - i\,\langle -|+\rangle + \langle -|-\rangle\right) = \frac{1}{2}(1+1) = 1 \\ \langle 2|2\rangle &= \frac{1}{2}\left(\langle +| + i\,\langle -|\right)\left(|+\rangle - i\,|-\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\langle +|+\rangle - i\,\langle +|-\rangle + i\,\langle -|+\rangle + \langle -|-\rangle\right) = \frac{1}{2}(1+1) = 1 \end{aligned}$$

Somit sind die beiden Vektoren orthonormal. Wir möchten, dass $U\,|+\rangle = |1\rangle$ und $U\,|-\rangle = |2\rangle$. Daher ist die Transformationsmatrix gegeben durch

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} .$$

Es ist leicht zu zeigen, dass diese Matrix unitär ist, denn

$$U^\dagger U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = UU^\dagger .$$

Wir bestimmen nun N, indem wir z.B. $\langle 1|M|2\rangle = \langle +|N|-\rangle$ fordern. Es folgt $\langle +|N|-\rangle = \left\langle 1|UNU^\dagger|2\right\rangle$, wenn wir die zwei Vektoren $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ wieder durch $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ ausdrücken. Es ist somit $M = UNU^\dagger$ oder $N = U^\dagger MU$ und somit

$$N = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 3: Eigenvektoren und Eigenwerte eines Operators $\boxed{\textbf{2+2 = 4 Punkte}}$

Die Vektoren $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ seien eine Orthonormalbasis eines zweidimensionalen komplexen Hilbert-Raums. Gegeben sei der Operator

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dargestellt in der Basis} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\,|1\rangle + b\,|2\rangle \ .$$

(a) Ist σ_y hermitesch? Berechnen Sie die Eigenwerte und -vektoren $|x_i\rangle$ bezüglich der angegebenen Basis.

(b) Prüfen Sie die Orthogonalität und Vollständigkeit der Eigenvektoren in der Darstellung der Orthonormalbasis. Drücken Sie den Projektionsoperator $P = \sum_i |x_i\rangle\langle x_i|$ durch die Orthonormalbasis aus und wenden Sie diesen auf die Eigenvektoren $|x_i\rangle$ an.

Lösung der Aufgabe 3

(a) Offensichtlich ist σ_y hermitesch, denn es gilt $\sigma_y^\dagger = \sigma_y$. Die Eigenwerte ergeben sich aus der Säkulargleichung (charakteristische Gleichung)

$$\det(\sigma_y - \lambda\mathbb{I}) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

zu $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$. Die dazugehörigen Eigenvektoren ergeben sich wie folgt:

$$(\sigma_y - \lambda_1\mathbb{I})x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(\sigma_y - \lambda_2\mathbb{I})x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diese können nun wieder durch die Orthonormalbasis dargestellt werden:

$$|x_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(i\,|1\rangle - |2\rangle\right), \qquad |x_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(i\,|1\rangle + |2\rangle\right)$$

(b) Die Orthogonalität ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}\langle x_1|x_2\rangle &= \frac{1}{2}\left(-i\,\langle 1| - \langle 2|\right)\left(i\,|1\rangle + |2\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\langle 1|1\rangle - \langle 1|2\rangle - i\,\langle 2|1\rangle - \langle 2|2\rangle\right) = 0 = \langle x_2|x_1\rangle\end{aligned}$$

Die Vollständigkeit ergibt sich nach:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2} |x_i\rangle\langle x_i| &= \frac{1}{2}\left[(i\,|1\rangle - |2\rangle)(-i\,\langle 1| - \langle 2|) + (i\,|1\rangle + |2\rangle)\,(-i\,\langle 1| + \langle 2|)\right] \\ &= |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| = \mathbb{I}\end{aligned}$$

Analog kann man die Vollständigkeit auch über die Nutzung der Vektordarstellung zeigen, die auf die Einheitsmatrix führt. Nun fehlt noch die Betrachtung des Projektors

$$P = \sum_i |x_i\rangle\langle x_i| = |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|$$

gemäß der Vollständigkeit. Daher lässt der Projektionsoperator die Eigenvektoren auch unverändert.

Aufgabe 4: Operatorspielerei, die Dritte $\boxed{2+2 = 4 \text{ Punkte}}$

Die zwei Teilaufgaben sind linear unabhängig.

(a) Zeigen Sie: Besitzt ein linearer Operator A die Eigenschaft $AA^\dagger = A^\dagger A$ und ist $|a\rangle$ mit $\langle a|a\rangle = 1$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert a, so ist $|a\rangle$ auch Eigenvektor von $A^\dagger$ zum Eigenwert a^*. *Hinweis:* Ein Operator, welcher mit seinem Adjungierten vertauscht, heißt Normaloperator und besitzt stets ein vollständiges System orthogonaler Eigenvektoren.

(b) Gegeben sei der Operator
$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$
Zeigen Sie mit Hilfe der bekannten Reihenentwicklung, dass $\exp(i\alpha\sigma_x) = \mathbb{I}\cos\alpha + i\sigma_x \sin\alpha$ mit dem Einheitsoperator $\mathbb{I}$.

Lösung der Aufgabe 4

(a) Es gilt also $A|a\rangle = a|a\rangle$ und somit weiter $\langle a| A^\dagger = a^* \langle a|$. Aus $\left\langle a|A^\dagger|a\right\rangle = a^* \langle a|a\rangle = a^*$ ergibt sich dann auch
$$A^\dagger |a\rangle = a^* |a\rangle + |\chi\rangle \quad \text{mit} \quad \langle a|\chi\rangle = 0 \quad .$$
Somit bleibt zu zeigen, dass $|\chi\rangle = 0$ bzw. $\langle\chi|\chi\rangle = 0$. Dies folgt aus:
$$\langle\chi|\chi\rangle = [\langle a| A - a\langle a|] \left[A^\dagger |a\rangle - a^* |a\rangle\right] = \left\langle a|AA^\dagger|a\right\rangle - a \underbrace{\left\langle a|A^\dagger|a\right\rangle}_{=a^*} - \underbrace{a^* \langle a|}_{=\langle a|A^\dagger} A|a\rangle + aa^* \langle a|a\rangle$$
$$= \langle a| \underbrace{AA^\dagger - A^\dagger A}_{=0} |a\rangle = 0$$
Damit ist $A^\dagger |a\rangle = a^* |a\rangle$.

(b) Wir nutzen wieder die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion und erhalten so
$$\begin{aligned}\exp(i\alpha\sigma_x) &= \sum_{n=0} (ix\sigma_x)^n \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} i^{2n}\alpha^{2n}\sigma_x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} i^{2n+1}\alpha^{2n+1}\sigma_x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\alpha^{2n}\mathbb{I} + \sum_{n=0}^{\infty} i\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\alpha^{2n+1}\sigma_x \cdot \mathbb{I} \\ &= \mathbb{I}\cos\alpha + i\sigma_x \sin\alpha\end{aligned}$$
wobei die vorletzte Zeile sich aus der Relation
$$\sigma_x^2 = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)^2 = \mathbb{I} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_x^{2n} = \mathbb{I},\ \sigma_x^{2n+1} = \sigma_x$$
ergibt.