Karlsruhe Institute of Technology

Sommersemester 2020 - Blatt 7
Moderne Theoretische Physik I

Prof. Dr. M. M. Mühlleitner, Dr. S. Liebler

Ausgabe: 01.06.20
Abgabe: 08.06.20
Besprechung: 10.06.20

Gesamtpunktzahl: **20 Punkte**

Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu)

Aufgabe 1: Vollständiger Satz kommutierender Observablen — 2+2+2 = 6 Punkte

Ein dreidimensionaler reeller Hilbert-Raum werde durch die Basis $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ aufgespannt. In dieser Basis seien die zwei Operatoren

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{definiert.}$$

(a) Sind H und B hermitesch? Bestimmen Sie die Eigenwerte von H und B.
Hinweis: ω und b seien reell.

(b) Zeigen Sie, dass H und B vertauschen. Es existiert somit ein gemeinsamer Satz von Eigenvektoren. Ermitteln Sie drei Vektoren, die sowohl zu H als auch zu B Eigenvektoren sind. Ist $\{H, B\}$ ein vollständiger Satz kommutierender Observablen?

(c) Zusätzlich sei

$$B' = b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

definiert. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von B'. Bilden $\{H, B'\}$ einen vollständigen Satz kommutierender Observablen?

Aufgabe 2: Quadrierte Operatoren — 2+1+2 = 5 Punkte

Ein dreidimensionaler reeller Hilbert-Raum werde wieder durch die Basis $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ aufgespannt. In dieser Basis seien die zwei Operatoren L_z und S definiert durch

$$\begin{aligned} L_z|1\rangle &= |1\rangle\,, & L_z|2\rangle &= 0\,, & L_z|3\rangle &= -|3\rangle\,, \\ S|1\rangle &= |3\rangle\,, & S|2\rangle &= |2\rangle\,, & S|3\rangle &= |1\rangle\,. \end{aligned}$$

(a) Geben Sie die Matrizen an, die die Operatoren L_z, L_z^2, S und S^2 in der angegebenen Basis repräsentieren. Sind die Operatoren Observablen?

(b) Geben Sie die allgemeinste Form einer Matrix an, die mit L_z^2 kommutiert.

(c) Bilden L_z^2 und S einen vollständigen Satz kommutierender Observablen? Geben Sie eine Basis aus gemeinsamen Eigenvektoren an.

Aufgabe 3: Impulsraumdarstellung — 2+2 = 4 Punkte

Üblicherweise wird die Schrödingergleichung im Ortsraum mit x als freier Variable diskutiert. Wir können aber genauso im Impulsraum mit p als freier Variable arbeiten.

(a) Leiten Sie die Darstellung des Ortsoperators X im Impulsraum ab. *Hinweis:* Gehen Sie wie in Vorlesung 12 bei der Ableitung des Impulsoperators im Ortsraum vor.

(b) Wie lautet die eindimensionale Schrödingergleichung mit dem Potential $V(x)$ in der Impulsraumdarstellung? Spezialisieren Sie das Ergebnis auf das Potential $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$.

Aufgabe 4: Impulsoperator und Impulseigenzustände **2+2+1 = 5 Punkte**

Betrachten Sie ein quantenmechanisches Teilchen, welches sich frei entlang einer Raumrichtung der Länge $2L$ bewegen kann.

(a) Unter welchen Randbedingungen an die Orstraumwellenfunktion ist der Impulsoperator P_x im Ortsraum hermitesch?
Hinweis: Schreiben Sie $\langle\psi|P_x|\phi\rangle = \int_{-L}^{L} dx \psi^* \frac{\hbar}{i}\partial_x \phi$ und integrieren Sie partiell. Welcher Teil des Resultats muss entfallen, damit Hermitizität vorliegt?

(b) Betrachten Sie nun die Eigenwertgleichung für den Impulsoperator $P_x\,|p\rangle = p\,|p\rangle$ im Ortsraum. Bestimmen Sie unter Berücksichtigung der in (a) gefundenen Randbedingungen das Eigenwertspektrum und die normierten Eigenfunktionen $|p\rangle$ bzw. $\psi_p(x)$.
Hinweis: Die Randbedingungen aus (a) führen auf $|\psi_p(L)|^2 = |\psi_p(-L)|^2$, wobei $\psi_p(x)$ die Wellenfunktion von $|p\rangle$ im Ortsraum darstellt. Sie sollten $\psi_p^n(x) = Ne^{i/\hbar p_n x}$ mit $p_n = \frac{n\pi\hbar}{L}, n \in \mathbb{Z}$ erhalten.

(c) Untersuchen Sie den Grenzfall $L \to \infty$. Was passiert mit dem diskreten Spektrum der Impulseigenwerte für $L \to \infty$? Normieren Sie die Eigenfunktionen auf die δ-Funktion $\langle p|p'\rangle = \delta(p - p')$.
Hinweis: Berechnen Sie zuerst $\langle p|p'\rangle$ für den endlichen Fall. Sie erhalten einen Zusammenhang, welcher die Normierung auf die δ-Funktion rechtfertigt.

Aufgabe 5: Paritätische Lyrik **Präsenzaufgabe**

Diese Aufgabe ist nicht schriftlich einzureichen. Die zwei Teilaufgaben sind unabhängig zu bearbeiten und je eine 10-15 minütige Präsentation wert.

(a) Stellen Sie den Paritätsoperator und dessen Eigenschaften vor. Dazu gehören dessen Eigenwerte und das Eigenspektrum sowie die Aufspaltung einer Wellenfunktion in gerade und ungerade Lösungen. Betrachten Sie ein Beispiel, z.B. ein spiegelsymmetrisches Potentialproblem. *Hinweis:* Schauen Sie sich beispielsweise das entsprechende Kapitel im Cohen-Tannoudji an.

(b) Schreiben Sie ein Gedicht (vom Umfang des Erlkönigs) oder eine Kurzgeschichte. Worte, die vorkommen sollten sind: Corona, Quarantäne, Quantenmechanik, Bra, Ket und Ununterscheidbarkeit. *Hinweis:* Hier beschränkt sich die Präsentationsdauer ausnahmsweise auf die Dauer des Gedichts/der Kurzgeschichte.