

Theorie C Nachklausur

Auf Wunsch fällt dieses Blatt wegen der Nachklausur der Theorie C am 16.06.2020 ausnahmsweise leicht kürzer aus und umfasst nur 15 Punkte.

Aufgabe 1: Quantenmechanischer Virialsatz

2+3 = 5 Punkte

Betrachten Sie die stationären Zustände gegeben durch die Energieeigenfunktionen $|\psi_E\rangle$ mit

$$H |\psi_E\rangle = E |\psi_E\rangle, \quad H = \frac{1}{2m} P_x^2 + V, \quad H = H^\dagger.$$

- Zeigen Sie, dass für jeden Operator A der Erwartungswert $\langle \psi_E | [A, H] | \psi_E \rangle$ im Zustand $|\psi_E\rangle$ verschwindet. *Hinweis:* Führen Sie die Rechnung vollständig im Hilbert-Raum mit $|\psi_E\rangle$ durch, eine Verwendung der Orts- oder Impulsraumdarstellung ist nicht notwendig!
- Beweisen Sie für eindimensionale Potentiale der Form $V = \alpha x^k$ mit α, k reell den quantenmechanischen Virialsatz für Erwartungswerte von Energieeigenzuständen:

$$\left\langle \frac{1}{2m} P_x^2 \right\rangle = \frac{k}{2} \langle V \rangle.$$

Hinweis: Betrachten Sie den Kommutator $[H, P_x X]$ und benutzen Sie (a). Nutzen Sie hier den Impulsoperator im Ortsraum. Sie erhalten für den angegebenen Kommutator $[H, P_x X] = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{1}{m} P_x^2 - kV \right)$.

Aufgabe 2: Teilchen in einem Magnetfeld

2+2+1+1 = 6 Punkte

Wir betrachten in dieser Aufgabe ein Teilchen in einem Magnetfeld und möchten uns bekannte klassische Resultate auf die Quantenmechanik übertragen.

- Zunächst betrachten wir die klassische Theorie. Ausgangspunkt ist die Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + \frac{q}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{x})$$

mit $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$ für ein Teilchen der Masse m mit Ladung q in einem Magnetfeld $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Zeigen Sie, dass der zu $\vec{x}$ konjugierte Impuls durch $\vec{p} = m\vec{v} + \frac{q}{c} \vec{A}$ gegeben ist, und die Hamilton-Funktion durch

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2.$$

- Wir erhalten nun die Quantentheorie des Teilchens im Magnetfeld, indem wir $\vec{x}$ und $\vec{p}$ durch Operatoren $\vec{X}$ und $\vec{P}$ ersetzen, die die kanonischen Vertauschungsrelationen erfüllen. Bestimmen Sie den Operator $\vec{V}$, der der Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Teilchens entspricht, und berechnen Sie den Kommutator $[V_i, V_j]$ in der Ortsdarstellung. Was stellen Sie fest?
Hinweis: Starten Sie mit $\vec{P} = m\vec{V} + \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{X})$. Sie sollten $[V_i, V_j] = i \frac{q\hbar}{cm^2} \epsilon_{ijk} B_k$ erhalten.

- (c) Für den Fall eines konstanten Magnetfelds $\vec{B} = (0, 0, B_0)^T$ in z -Richtung können wir $\vec{A} = (-yB_0, 0, 0)^T$ wählen (sogenannte Landau-Eichung). Bestimmen Sie für diesen Fall den Hamilton-Operator und zeigen Sie, dass dieser mit der x - und z -Komponente des Impulsoperators $\vec{P}$ vertauscht.
- (d) Stellen Sie noch immer für den Fall des konstanten Magnetfelds die stationäre Schrödingergleichung (mit Energie E) für die Wellenfunktion $\psi(x, y, z)$ auf. Machen Sie einen Produktansatz $\psi(x, y, z) = \exp(ip_0x/\hbar)\chi(y)$ und finden Sie die Wellengleichung für $\chi(y)$.

Aufgabe 3: Observablen und Projektoren

1+1+2 = 4 Punkte

Wir betrachten ein Teilchen in einer Dimension, dessen Zustand durch eine Wellenfunktion $\psi(x)$ beschrieben wird. Nun wird eine Messung durchgeführt. Das Messgerät ist so konstruiert, dass es genau dann ausschlägt, wenn sich das Teilchen in einem bestimmten Intervall I auf der reellen Achse befindet.

- (a) Konstruieren Sie die zu dieser Messung gehörende Observable.
- (b) Leiten Sie aus den Postulaten der Quantenmechanik eine Formel für die Wahrscheinlichkeit her, das Teilchen bei der Messung im Intervall I zu finden.
- (c) Angenommen, bei der Messung findet man, dass sich das Teilchen nicht im Intervall I befindet. Finden Sie, basierend auf den Postulaten der Quantenmechanik, eine Formel für die Wellenfunktion unmittelbar nach der Messung.

Aufgabe 4: Analogien und Deutungen

Präsenzaufgabe

Diese Aufgabe ist nicht schriftlich einzureichen. Die zwei Teilaufgaben sind unabhängig zu bearbeiten und je eine 10-15 minütige Präsentation wert.

- (a) Stellen Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen aus der Mechanik vor. Führen Sie die Poisson-Klammer ein und erläutern Sie die Bewegungsgleichung $\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$ für eine beliebige Observable $f(q_i, p_i, t)$ eines Hamilton'schen Systems $H(q_i, p_i)$.
Hinweis: Das quantenmechanische Analogon begegnet Ihnen zeitnah in der Vorlesung.
- (b) Die in der Vorlesung präsentierten Postulate der Quantenmechanik basieren auf der bekanntesten Interpretation der Quantenmechanik, der Kopenhagener Deutung, die sich insbesondere durch den Kollaps der Wellenfunktion nach dem Messprozess auszeichnet. Stellen Sie einige Konsequenzen dieser Interpretation vor, z.B. zu finden unter https://en.wikipedia.org/wiki/Copenhagen_interpretation. Dazu gehört das wohlbekannte Beispiel von Schrödinger's Katze. Sie dürfen auch die gängigen Kritikpunkte an dieser Interpretation ausführen.