Karlsruhe Institute of Technology

Sommersemester 2020 - Blatt 9
Moderne Theoretische Physik I

Prof. Dr. M. M. Mühlleitner, Dr. S. Liebler

Ausgabe: 15.06.20
Abgabe: 22.06.20
Besprechung: 24.06.20

Gesamtpunktzahl: **20 Punkte**

Lehrevaluation bis 17.06.2020 Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu)
Bitte beteiligen Sie sich an der Lehrevaluation zur Vorlesung und Übung. Die relevanten Links finden Sie auf Ilias in einem PDF auf der Vorlesungsseite oder im Blog auf der Übungsseite.

Aufgabe 1: Harmonischer Oszillator und Quantisierung — 2+1+1 = 4 Punkte

Wie in der Vorlesung erklärt, ergibt sich aus der stationären Schrödingergleichung eine Eigenwertgleichung der Form

$$\left[\frac{d^2}{d\hat{x}^2} - 2\hat{x}\frac{d}{d\hat{x}}\right] h(\hat{x}) = (1-2\epsilon)h(\hat{x})\,,$$

wobei ϵ durch $E = \hbar\omega\epsilon$ mit der Energie E des harmonischen Oszillators verknüpft ist. Wir wollen genau nachvollziehen, wie die Quantisierung von ϵ und damit E in der Analyse dieser Gleichung zustande kommt. Dazu machen wir wie in der Vorlesung den Ansatz

$$h(\hat{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}\hat{x}^{2m+p}\,,$$

wobei per Definition (von $p \in \mathbb{Z}$) $a_0 \neq 0$ sein soll.

(a) Zeigen Sie durch einen Koeffizientenvergleich, dass aus obiger Differentialgleichung die Rekursionsrelation $(2m+p+2)(2m+p+1)a_{2m+2} = (4m+2p-2\epsilon+1)a_{2m}$ für die Koeffizienten a_{2m} folgt.

(b) Betrachten Sie den Anfang der Rekursion und zeigen Sie, dass entweder $p = 0$ oder $p = 1$.

(c) Zeigen Sie, dass nach der Wahl von p alle Koeffizienten $a_{2m}, m > 0$ eindeutig durch a_0 bestimmt sind. Physikalisch relevant, also normierbar, sind nur die Lösungen, für die nur endlich viele Koeffizienten von Null verschieden sind. Leiten Sie daraus die Quantisierungsbedingung für E her.

Aufgabe 2: Harmonischer Oszillator und Hermite-Polynome — 5·2 = 10 Punkte

Wir möchten uns in dieser Aufgabe näher beschäftigen mit den Lösungen des quantenmechanischen, harmonischen Oszillators im Ortsraum. Diese beinhalten die in einer Präsenzaufgabe schonmal angesprochenenden Hermite-Polynome $H_n(x), n \in \mathbb{N}$. $H_n(x)$ ist ein Polynom vom Grad n und kann wie folgt definiert werden: Sei $f(x) = \exp(-x^2)$, dann ist

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = (-1)^n H_n(x) f(x)\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass
$$H_n(x) = \left(2x - \frac{d}{dx}\right) H_{n-1}(x)\,.$$
Hinweis: Schreiben Sie $(d/dx)^n = (d/dx)(d/dx)^{n-1}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\exp(-t^2+2tx)$ die erzeugende Funktion der Hermite-Polynome ist, in dem Sinne, dass
$$H_n(x) = \left.\frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2+2tx}\right|_{t=0}\,.$$
Hinweis: Entwickeln Sie $f(x+t)$ um x. Im resultierenden Ausdruck sollten Sie dann mit e^{x^2} multiplizieren und die Ersetzung $t \to -t$ durchführen und wiederum um t entwickeln.

(c) Beweisen Sie mit Hilfe der erzeugenden Funktion die wichtigen Rekursionsrelationen $\frac{d}{dx}H_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$ und $H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x)$.
Hinweis: Differenzieren Sie zuerst $e^{x^2}f(x-t)$ nach x.

(d) Zeigen Sie durch Einsetzen, dass

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)$$

eine Eigenfunktion des Hamilton-Operators $H = \frac{1}{2m}P_x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$ ist.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass Sie die Gleichung $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 - E_n\right)\varphi_n(x) = 0$ erhalten. Sie benötigen nicht die explizite Form der Hermite-Polynome, sondern nur die Rekursionsrelationen der vorherigen Teilaufgabe!

(e) Berechnen Sie explizit $H_0(x)$, $H_1(x)$ und $H_2(x)$. Zeigen Sie für $n = 1$ und $n = 2$, dass auch

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left\langle x|(a^\dagger)^n|0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x - \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\frac{d}{dx}\right)^n \varphi_0(x)$$

auf die Lösungen $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ führt. *Hinweis:* Mit der eleganten algebraischen Lösung und damit $a^\dagger$ und a beschäftigen wir uns nächste Woche ausführlicher.

Aufgabe 3: Harmonischer Oszillator und Korrespondenzprinzip **3·2 = 6 Punkte**

Wir möchten noch einen Vergleich des harmonischen Oszillators in klassischer und quantenmechanischer Formulierung in einer Dimension bezüglich der Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Potential anstellen.

(a) Berechnen Sie zunächst die Observablen $x(t)$, $p(t)$ und $E = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kx^2$ des klassischen harmonischen Oszillators aus $m\ddot{x} + kx = 0$ mit der Frequenz $\omega = \sqrt{k/m}$, der Masse m, sowie den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = \omega A$. Definieren Sie die klassische Aufenthaltswahrscheinlichkeit $W_k(x)$ über die Aufenthaltsdauer dt in einem Ortsintervall dx nach $W_k(x)dx = 2\frac{dt}{T}$ mit der Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Was ergibt sich für $W_k(x)$ in Abhängigkeit von E? *Hinweis:* Sie sollten $W_k^{-1}(x) = \pi\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - x^2}$ erhalten.

(b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle x\rangle_k$, $\langle x^2\rangle_k$, $\langle p\rangle_k$, $\langle p^2\rangle_k$ und $\langle E\rangle_k$. *Hinweis:* Sie können entweder die Aufenthaltswahrscheinlichkeit aus Teilaufgabe (a) nutzen und über den Ort integrieren oder den Zeitmittelwert über eine Periodendauer ausrechnen.

(c) Betrachten Sie schließlich die Funktion $W_k(x)$, in der Sie die klassische Energie durch die quantisierten Energien $E \to E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ ersetzen. Skizzieren Sie die Funktion für einige n und vergleichen Sie mit der quantenmechanischen Aufenthaltswahrscheinlichkeit. Was beobachten Sie für sehr kleine bzw. sehr große n? *Hinweis:* Die quantenmechanische Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist $W_q(x) = |\varphi_n(x)|^2$ gemäß der vorherigen Aufgabe 2 (d).

Aufgabe 4: Andere Deutungen **Präsenzaufgabe**

Diese Aufgabe ist nicht schriftlich einzureichen.
Stellen Sie eine von Ihnen ausgesuchte andere Interpretation der Quantenmechanik und auch deren Schwachpunkte im Ansatz vor. Einen Überblick liefern deutsche und englische Wikipedia-Artikel. *Aktueller Hinweis:* Bleiben Sie aber bitte obskuren Verschwörungstheorien fern.