Ausgabe: 15.06.20
Abgabe: 22.06.20
Besprechung: 24.06.20

Gesamtpunktzahl: **20 Punkte**

Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu)

Aufgabe 1: Harmonischer Oszillator und Quantisierung **2+1+1 = 4 Punkte**

Wie in der Vorlesung erklärt, ergibt sich aus der stationären Schrödingergleichung eine Eigenwertgleichung der Form

$$\left[\frac{d^2}{d\hat{x}^2} - 2\hat{x}\frac{d}{d\hat{x}}\right] h(\hat{x}) = (1-2\epsilon)h(\hat{x})\,,$$

wobei ϵ durch $E = \hbar\omega\epsilon$ mit der Energie E des harmonischen Oszillators verknüpft ist. Wir wollen genau nachvollziehen, wie die Quantisierung von ϵ und damit E in der Analyse dieser Gleichung zustande kommt. Dazu machen wir wie in der Vorlesung den Ansatz

$$h(\hat{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}\hat{x}^{2m+p}\,,$$

wobei per Definition (von $p \in \mathbb{Z}$) $a_0 \neq 0$ sein soll.

(a) Zeigen Sie durch einen Koeffizientenvergleich, dass aus obiger Differentialgleichung die Rekursionsrelation $(2m+p+2)(2m+p+1)a_{2m+2} = (4m+2p-2\epsilon+1)a_{2m}$ für die Koeffizienten a_{2m} folgt.

(b) Betrachten Sie den Anfang der Rekursion und zeigen Sie, dass entweder $p=0$ oder $p=1$.

(c) Zeigen Sie, dass nach der Wahl von p alle Koeffizienten $a_{2m}, m > 0$ eindeutig durch a_0 bestimmt sind. Physikalisch relevant, also normierbar, sind nur die Lösungen, für die nur endlich viele Koeffizienten von Null verschieden sind. Leiten Sie daraus die Quantisierungsbedingung für E her.

Lösung der Aufgabe 1

(a) Wir finden die Rekursionsrelation durch Koeffizientenvergleich. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\hat{x}}h(\hat{x}) &= \sum_{m=0}^{\infty}(2m+p)a_{2m}\hat{x}^{2m+p-1} \\
2\hat{x}\frac{d}{d\hat{x}}h(\hat{x}) &= \sum_{m=0}^{\infty}2(2m+p)a_{2m}\hat{x}^{2m+p} \\
\frac{d^2}{d\hat{x}^2}h(\hat{x}) &= \sum_{m=0}^{\infty}(2m+p)(2m+p-1)a_{2m}\hat{x}^{2m+p-2} \\
&= \sum_{m'=-1}^{\infty}(2m'+p+2)(2m'+p+1)a_{2m'+2}\hat{x}^{2m'+p}\,.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde $m' = m-1$ ersetzt. Gleichsetzen der Koeffizienten von $\hat{x}^{2m+p}$ der Eigenwertgleichung auf der linken und rechten Seite liefert dann

$$(2m+p+2)(2m+p+1)a_{2m+2} - 2(2m+p)a_{2m} = (1-2\epsilon)a_{2m}$$

und somit

$$(2m+p+2)(2m+p+1)a_{2m+2} = (1-2\epsilon+4m+2p)a_{2m}\,.$$

(b) Der Term mit der niedrigsten Potenz von $\hat{x}$ auf der linken Seite der Gleichung ist $p(p-1)a_0\hat{x}^{p-2}$. Auf der rechten Seite ist die niedrigste Potenz $(1-2\epsilon)a_0\hat{x}^p$. Für allgemeines $a_0 \neq 0$ folgt somit $p(p-1) = 0$ und damit entweder $p = 0$ oder $p = 1$.

(c) a_{2m+2} wird durch die Rekursionsrelation eindeutig durch a_{2m} bestimmt, sofern p festliegt und $(2m+p+2)(2m+p+1) \neq 0$. Sowohl für $p = 0$ wie für $p = 1$ ist letztere Ungleichung erfüllt. Daher sind für beide Wahlen von p alle $a_{2m}, m > 0$ durch a_0 eindeutig bestimmt. a_{2m+2} wird Null und damit ebenso alle höheren Koeffizienten, wenn $4m+2p+1-2\epsilon = 0$ ist. Daraus folgt sofort $\epsilon = 2m+p+\frac{1}{2}$ und aufgrund von $p = 0, 1$ und $m = 0, 1, \ldots$ ist somit $\epsilon = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$.

Aufgabe 2: Harmonischer Oszillator und Hermite-Polynome $\boxed{\mathbf{5 \cdot 2 = 10\ Punkte}}$

Wir möchten uns in dieser Aufgabe näher beschäftigen mit den Lösungen des quantenmechanischen, harmonischen Oszillators im Ortsraum. Diese beinhalten die in einer Präsenzaufgabe schonmal angesprochenenden Hermite-Polynome $H_n(x), n \in \mathbb{N}$. $H_n(x)$ ist ein Polynom vom Grad n und kann wie folgt definiert werden: Sei $f(x) = \exp(-x^2)$, dann ist

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = (-1)^n H_n(x) f(x)\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass
$$H_n(x) = \left(2x - \frac{d}{dx}\right) H_{n-1}(x)\,.$$
Hinweis: Schreiben Sie $(d/dx)^n = (d/dx)(d/dx)^{n-1}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\exp(-t^2+2tx)$ die erzeugende Funktion der Hermite-Polynome ist, in dem Sinne, dass
$$H_n(x) = \left.\frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2+2tx}\right|_{t=0}\,.$$
Hinweis: Entwickeln Sie $f(x+t)$ um x. Im resultierenden Ausdruck sollten Sie dann mit e^{x^2} multiplizieren und die Ersetzung $t \to -t$ durchführen und wiederum um t entwickeln.

(c) Beweisen Sie mit Hilfe der erzeugenden Funktion die wichtigen Rekursionsrelationen $\frac{d}{dx} H_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$ und $H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x)$.
Hinweis: Differenzieren Sie zuerst $e^{x^2} f(x-t)$ nach x.

(d) Zeigen Sie durch Einsetzen, dass
$$\varphi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)$$
eine Eigenfunktion des Hamilton-Operators $H = \frac{1}{2m}P_x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$ ist.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass Sie die Gleichung $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - E_n\right)\varphi_n(x) = 0$ erhalten. Sie benötigen nicht die explizite Form der Hermite-Polynome, sondern nur die Rekursionsrelationen der vorherigen Teilaufgabe!

(e) Berechnen Sie explizit $H_0(x)$, $H_1(x)$ und $H_2(x)$. Zeigen Sie für $n = 1$ und $n = 2$, dass auch

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle x|(a^\dagger)^n|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x - \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{d}{dx} \right)^n \varphi_0(x)$$

auf die Lösungen $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ führt. *Hinweis:* Mit der eleganten algebraischen Lösung und damit $a^\dagger$ und a beschäftigen wir uns nächste Woche ausführlicher.

Lösung der Aufgabe 2

(a) Wir gehen aus von der Definition

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2}$$

und erhalten damit

$$\begin{aligned}(-1)^n H_n(x) e^{-x^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} e^{-x^2} = \frac{d}{dx}(-1)^{n-1} H_{n-1}(x) e^{-x^2} \\ &= (-1)^{n-1} e^{-x^2}\left(-2x + \frac{d}{dx}\right) H_{n-1}(x)\,.\end{aligned}$$

Somit gilt offenbar

$$H_n(x) = \left(2x - \frac{d}{dx}\right) H_{n-1}(x)$$

Zusatz: Diese Beziehung führt auf die Rodrigues Formel $H_n(x) = (2x - \frac{d}{dx})^n \cdot 1$ und auch unmittelbar auf die Darstellung $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$.

(b) Wie vorgeschlagen entwickeln wir $f(x+t) = e^{-x^2-t^2-2tx}$ um x und erhalten

$$f(x+t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n t^n H_n(x) e^{-x^2}\,.$$

Multiplikation mit e^{x^2} und die Ersetzung $t \to -t$ liefern weiter

$$e^{x^2} f(x-t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n\,.$$

Die linke Seite ist $e^{x^2} f(x-t) = e^{-t^2+2tx} =: g(t)$. Entwickeln wir um $t = 0$, so ist die linke Seite

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} g^{(n)}(0) t^n\,.$$

Ein einfacher Vergleich mit dem vorherigen Ausdruck ergibt somit

$$H_n(x) = g^{(n)}(0) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n e^{-t^2+2tx}\bigg|_{t=0}\,.$$

(c) Wir starten, indem wir die Beziehung $e^{x^2} f(x-t)$ nach x differenzieren. Dies liefert

$$2te^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d}{dx} H_n(x)\,.$$

Die linke Seite lässt sich gemäß vorheriger Teilaufgabe auch wieder umformen, die rechte Seite im Index verschieben, so dass

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n!} H_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \frac{d}{dx} H_{n+1}(x)\,.$$

Koeffizientenvergleich liefert nun

$$\frac{2H_n(x)}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{d}{dx} H_{n+1}(x)$$

und damit

$$\frac{d}{dx} H_{n+1}(x) = 2(n+1) H_n(x) \qquad \text{oder} \quad \frac{d}{dx} H_n(x) = 2n H_{n-1}(x)\,.$$

Unter Verwendung der ersten Teilaufgabe folgt dann

$$H_n(x) = \left(2x - \frac{d}{dx}\right) H_{n-1}(x) = 2x H_{n-1}(x) - 2(n-1) H_{n-2}(x)\,.$$

(d) Aus der bekannten Eigenwertgleichung $H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle$ folgt unter Verwendung der Ortsdarstellung $P_x = -i\hbar\,\partial_x$ und $X = x$ folgende Differentialgleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + \frac{1}{2}\,m\omega^2 x^2 - E_n\right)\varphi_n(x) = 0.$$

Zu Zeigen ist, dass die angegebenen φ_n Lösungen dieser sind. Berechnen wir zunächst die zweite Ableitung von φ_n

$$\begin{aligned}
\partial_x \varphi_n &= \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n\,n!}}\,\partial_x \left\{ e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\, H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)\right\} \\
&= \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n\,n!}}\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \left\{ \left(-\frac{m\omega}{\hbar}x\right) H_n + 2n\, H_{n-1} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \right\}\,,
\end{aligned}$$

wobei die Abkürzung $H_n \equiv H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)$ und die Ableitungsrelation der Hermite-Polynome $\partial_x\, H_n = 2n\, H_{n-1}$ verwendet wurde. Es folgt weiter

$$\begin{aligned}
\partial_x^2 \varphi_n = &\left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n\,n!}}\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \left(-\frac{m\omega}{\hbar}\right) \left\{ H_n + \left(-\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right) H_n + 2n\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x\, H_{n-1} \right. \\
&\left. + 2n\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x\, H_{n-1} + 2n\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right) 2(n-1)\, H_{n-2} \left(-\frac{\hbar}{m\omega}\right) \right\} \\
= &\left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n\,n!}}\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \left(-\frac{m\omega}{\hbar}\right) \left\{ H_n \left(1 - \frac{m\omega}{\hbar}x^2\right) \right. \\
&\left. + 2n \left[2\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) H_{n-1} - 2(n-1)\, H_{n-2} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Rekursionsrelation für Hermite-Polynome $H_n(x) = 2x\, H_{n-1}(x) - 2(n-1)\, H_{n-2}(x)$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\partial_x^2 \varphi_n &= \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n\, n!}}\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\, H_n \left(-\frac{m\omega}{\hbar}\right) \left\{2n+1-\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right\} \\
&= \varphi_n \left(-\frac{m\omega}{\hbar}\right) \left\{2n+1-\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right\} \\
\Rightarrow \qquad 0 &= \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{m\omega}{\hbar}\right)\left[2n+1-\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right] + \frac{1}{2}\, m\omega^2 x^2 - E_n\right\} \varphi_n \\
\Leftrightarrow \qquad 0 &= \hbar\omega(n+\frac{1}{2}) - E_n\,.
\end{aligned}
$$

Somit ist φ_n Eigenzustand zum Eigenwert $E_n = \hbar\omega\,(n+\frac{1}{2})$.

(e) Die gefragten Hermite-Polynome sind $H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x$ und $H_2(x) = 4x^2 - 2$. Es ist

$$
\varphi_0 = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\,x^2}\,.
$$

Damit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x - \sqrt{\frac{\hbar}{\omega m}} \frac{d}{dx}\right) \varphi_0 \\
&= \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x - \sqrt{\frac{\hbar}{\omega m}} \frac{m\omega}{\hbar}\, x\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\,x^2} \\
&= \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{2} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\,x^2}\,.
\end{aligned}
$$

Dies stimmt tatsächlich mit $\varphi_1(x)$ in Teilaufgabe (d) überein. Analog ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\varphi_2 &= \frac{1}{\sqrt{8}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x - \sqrt{\frac{\hbar}{\omega m}} \frac{d}{dx}\right)^2 \varphi_0 \\
&= \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{8}} \left(4\frac{m\omega}{\hbar}\, x^2 - 2\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\,x^2}\,.
\end{aligned}
$$

Dies entspricht $\varphi_2(x)$ in Teilaufgabe (d).

Aufgabe 3: Harmonischer Oszillator und Korrespondenzprinzip $\boxed{\mathbf{3{\cdot}2 = 6\ Punkte}}$

Wir möchten noch einen Vergleich des harmonischen Oszillators in klassischer und quantenmechanischer Formulierung in einer Dimension bezüglich der Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Potential anstellen.

(a) Berechnen Sie zunächst die Observablen $x(t)$, $p(t)$ und $E = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kx^2$ des klassischen harmonischen Oszillators aus $m\ddot{x} + kx = 0$ mit der Frequenz $\omega = \sqrt{k/m}$, der Masse m, sowie den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = \omega A$. Definieren Sie die klassische Aufenthaltswahrscheinlichkeit $W_k(x)$ über die Aufenthaltsdauer dt in einem Ortsintervall dx nach $W_k(x)dx = 2\frac{dt}{T}$ mit der Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Was ergibt sich für $W_k(x)$ in Abhängigkeit von E? *Hinweis:* Sie sollten $W_k^{-1}(x) = \pi\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - x^2}$ erhalten.

(b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle x\rangle_k$, $\langle x^2\rangle_k$, $\langle p\rangle_k$, $\langle p^2\rangle_k$ und $\langle E\rangle_k$. *Hinweis:* Sie können entweder die Aufenthaltswahrscheinlichkeit aus Teilaufgabe (a) nutzen und über den Ort integrieren oder den Zeitmittelwert über eine Periodendauer ausrechnen.

(c) Betrachten Sie schließlich die Funktion $W_k(x)$, in der Sie die klassische Energie durch die quantisierten Energien $E \to E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ ersetzen. Skizzieren Sie die Funktion für einige n und vergleichen Sie mit der quantenmechanischen Aufenthaltswahrscheinlichkeit. Was beobachten Sie für sehr kleine bzw. sehr große n? *Hinweis:* Die quantenmechanische Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist $W_q(x) = |\varphi_n(x)|^2$ gemäß der vorherigen Aufgabe 2 (d).

Lösung der Aufgabe 3

(a) Die Differentialgleichung des klassischen harmonischen Oszillators mit $V = \frac{1}{2}kx^2$ und damit $F = -kx$ lautet $m\ddot{x} + kx = 0$. Der Exponentialansatz $x(t) = \tilde{x}e^{i\alpha t}$ liefert die Lösungen $\alpha = \pm\sqrt{k/m}$. Mit der bekannten Frequenz $\omega = \sqrt{k/m}$ bleibt so $x = \tilde{x}_1 e^{i\omega t} + \tilde{x}_2 e^{-i\omega t}$. Nun sei $x(0) = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = 0$ und somit $\tilde{x}_2 = -\tilde{x}_1$. Weiter sei $\dot{x}(0) = i\omega\tilde{x}_1 2 \stackrel{!}{=} \omega A$ und daher $\tilde{x}_1 = \frac{1}{2i}A$.
Somit ist

$$x(t) = \frac{1}{2i}A(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) = A\sin(\omega t) \qquad \dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t)\,.$$

Wir berechnen damit

$$\begin{aligned} p(t) &= mv = m\dot{x} = mA\omega\cos(\omega t) \\ E &= T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\,. \end{aligned}$$

Somit ist auch $A^2 = \frac{2E}{m\omega^2}$. Wir berechnen nun die klassische Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens aus

$$W_k(x)dx = 2\frac{dt}{T} \qquad \Longrightarrow \qquad W_k(x) = 2\frac{1}{T}\frac{dt}{dx}\,.$$

Es ist

$$\frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t) = A\omega\sqrt{1 - \sin^2(\omega t)} = A\omega\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}$$

und damit

$$W_k(x) = 2\frac{\omega}{2\pi}\frac{1}{A\omega\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - x^2}}\,.$$

Es lässt sich zeigen, dass diese Aufenthaltswahrscheinlichkeit korrekt normiert ist, denn

$$\int_{-A}^{A} W_k(x)dx = \int_{-A}^{A}\frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}dx = \frac{1}{\pi}\left[\arcsin\left(\frac{x}{A}\right)\right]_{-A}^{A} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 1\,.$$

(b) Wir berechnen die klassischen Erwartungswerte. Dies kann auf verschiedene Arten erfolgen: Entweder man berechnet den Zeitmittelwert über eine Periodendauer oder man nutzt die zuvor berechnete Aufenthaltswahrscheinlichkeit. Beides liefert äquivalente Resultate. Die Zeitmittelwerte ergeben

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle_k &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{1}{T}A\int_0^T \cos(\omega t)dt = \frac{1}{T}A\frac{1}{\omega}[\sin(\omega t)]_0^{2\pi/\omega} = 0 \\
\left\langle x^2\right\rangle_k &= \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt = \frac{1}{T}A^2\int_0^T \cos^2(\omega t)dt = \frac{1}{T}A^2\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4\omega}\sin(2\omega t)\right]_0^{2\pi/\omega} \\
&= \frac{1}{T}A^2\frac{1}{2}T = \frac{1}{2}A^2 \\
\langle p\rangle_k &= \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}Am\omega\int_0^T \sin(\omega t)dt = \frac{1}{T}Am\left[-\cos(\omega t)\right]_0^{2\pi/\omega} = \frac{1}{T}Am(-1+1) = 0 \\
\left\langle p^2\right\rangle_k &= \frac{1}{T}\int_0^T p^2(t)dt = \frac{1}{T}A^2m^2\omega^2\int_0^T \sin^2(\omega t)dt = \frac{1}{T}A^2m^2\omega^2\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4\omega}\sin(2\omega t)\right]_0^{2\pi/\omega} \\
&= \frac{1}{T}A^2m^2\omega^2\frac{1}{2}T = \frac{1}{2}m^2\omega^2A^2 \\
\langle E\rangle_k &= \frac{1}{T}\int_0^T E dt = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\,.
\end{aligned}$$

Wir zeigen exemplarisch die Berechnung über die Aufenthaltswahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle_k &= \int_{-A}^A xW_k(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-A}^A \frac{x}{\sqrt{A^2-x^2}} = 0 \\
\left\langle x^2\right\rangle_k &= \int_{-A}^A x^2W_k(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-A}^A \frac{x^2}{\sqrt{A^2-x^2}}dx = \frac{1}{\pi}\frac{A^2\pi}{2} = \frac{1}{2}A^2\,.
\end{aligned}$$

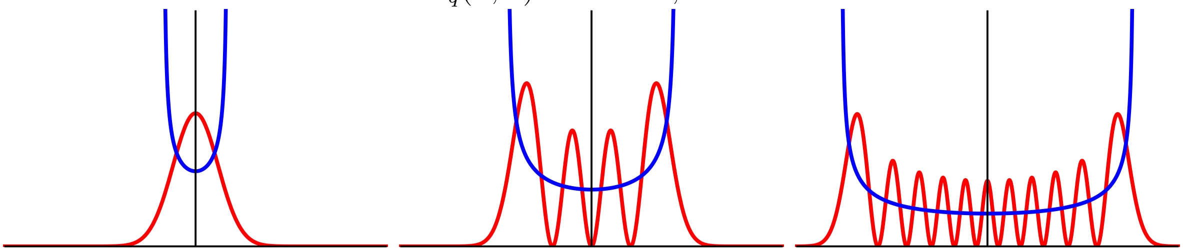
Analoges geht auch mit dem Impuls. Für diesen könnte man sogar separat auch noch eine Aufenthaltswahrscheinlichkeit $W_k(p)dp$ mit $W_k^{-1}(p) = \pi\sqrt{m^2\omega^2A^2 - p^2}$ definieren, was wir hier aber nicht weiter ausführen möchten. Wegen der verschwindenden Mittelwerte $\langle x\rangle_k = \langle p\rangle_k$ folgt für die Standardabweichungen $\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle_k}$ und $\Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle_k}$.
Zusatz: In der Quantenmechanik folgt ebenso $\langle X\rangle_q = \langle P_x\rangle_q = 0$ und weiter

$$\begin{aligned}
\left\langle X^2\right\rangle_q &= x_0^2\left(n+\frac{1}{2}\right) \\
\left\langle P_x^2\right\rangle_q &= \frac{\hbar^2}{x_0^2}\left(n+\frac{1}{2}\right) = x_0^2\omega^2m^2\left(n+\frac{1}{2}\right) \\
\langle E\rangle_q &= \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

mit $x_0^2 = \frac{\hbar}{\omega m}$. Für $n = 0$ ist dies von der Form der klassischen Lösungen.

(c) Wir betrachten nun die klassische und quantenmechanische Aufenthaltswahrscheinlichkeit noch etwas näher und setzen in der klassischen Variante $W_k(x,n)$ dazu die quantenmechanischen, diskreten Energiewerte ein. Die quantenmechanische Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist gegeben durch $W_q(x,n) = |\varphi_n(x,n)|^2$ in der vorherigen Aufgabe. Wir zeigen nachfolgend in blau die klassische $W_k(x,n)$ und in rot die quantenmechanische

Aufenthaltswahrscheinlichkeit $W_q(x,n)$ für $n = 0, 3$ und 10:



Die klassische Aufenthaltswahrscheinlichkeit folgt stets dem gleichen Muster: Die Wahrscheinlichkeit ist am Rand des Potentials, an den klassischen Umkehrpunkten des Teilchens am Größten, denn dort verbleibt für das Teilchen am wenigsten kinetische Energie und es bewegt sich dementsprechend nur langsam vorwärts.
Für den Grundzustand $n = 0$ ist dies im quantenmechanischen Fall völlig anders: Dort ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Zentrum am Größten. Gleichzeitig ist zu beachten, dass im quantenmechanischen Fall eine Aufenthaltswahrscheinlichkeit auch für sehr große und kleine x besteht, da sich das Teilchen mit exponentiell fallender Wahrscheinlichkeit im klassisch verbotenen Bereich aufhalten kann.
Für große n, wie am Beispiel für $n = 10$ schon ersichtlich, nähern sich die quantenmechanische und die klassische Aufenthaltswahrscheinlichkeit an.