Gesamtpunktzahl: **20 Punkte**

Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu)

Liebe Studierende,
meine Zeit am KIT endet mit Ablauf des Juni. Die Übungsleitung übernimmt ab 01.07.2020 PD Dr. Stefan Gieseke, der die dann verbleibenden zwei Übungsblätter sowie die Klausuren mit Ihnen bestreitet. Bitte richten Sie ab Juli Ihre Fragen an
stefan.gieseke@kit.edu
Ich persönlich wünsche Ihnen weiterhin viel Erfolg im Studium und Ihrer Zukunft!
Bleiben Sie gesund, Stefan Liebler

Klausurtermine

Die Klausuren zu den Veranstaltungen des Sommersemesters werden nun zentral neu geplant, daher lassen sich die ursprünglichen Termine mitunter nicht halten. Die Problematik mit dem Blockpraktikum P2 im August ist bekannt und wurde an die ASERV übermittelt. Sobald (neue) finale Termine und Örtlichkeiten feststehen, werden Sie informiert, vermutlich Anfang Juli.

Aufgabe 1: Kohärente Zustände

1+2+2+2+2+2+1 = 12 Punkte

Gegeben sei ein eindimensionaler, harmonischer Oszillator mit Auf- und Absteigeoperatoren $a^\dagger$ und a mit $[a, a^\dagger] = 1$. Der Hamilton-Operator lässt sich schreiben in der Form $H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$ und die Eigenzustände von H zu den Energieeigenwerten $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ lassen sich gemäß $\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n\varphi_0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ aus dem Grundzustand gewinnen. Wir betrachten nun folgende, spezielle Überlagerung von Eigenzuständen (kohärente Zustände)

$$\psi_\lambda = N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} \varphi_n \qquad \text{mit} \qquad \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass ψ_λ ein Eigenzustand zum Absteige- oder Vernichtungsoperator a ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.

(b) Die Zeitentwicklung der Zustände φ_λ ergibt sich aus der bekannten Zeitentwicklung der stationären Zustände φ_n. Geben Sie die Lösung $\psi_\lambda(x,t)$ der zeitabhängigen Schrödingergleichung an. Führen Sie die Größe $\lambda(t) = \lambda e^{-i\omega t}$ ein. Normieren Sie die Zustände und bestimmen Sie so N. *Hinweis:* Sie sollten $N = e^{-|\lambda|^2/2}$ erhalten.

(c) Berechnen Sie für die kohärenten Zustände $\psi_\lambda(x,t)$ die Orts- und Impulserwartungswerte $\langle X \rangle (t) = \langle \psi_\lambda(x,t)|X|\psi_\lambda(x,t)\rangle$ und $\langle P_x \rangle (t)$ und vergleichen Sie mit den Ergebnissen des klassischen Oszillators auf dem letzten Übungsblatt. *Hinweis:* Schreiben Sie Orts- und Impulsoperator in Form von a und $a^\dagger$. Nutzen Sie $\lambda(t) = |\lambda|e^{-i\omega t + i\delta}$.

(d) Zeigen Sie mit Hilfe der Baker-Hausdorff-Formel von Blatt 5, dass für zwei Operatoren A und B mit $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$ die Beziehung $e^{\lambda(A+B)} = e^{\lambda A}e^{\lambda B}e^{-\lambda^2[A,B]/2}$ gilt. *Hinweis:* Definieren Sie $f(\lambda) = e^{\lambda(A+B)}$ und starten Sie mit $f(\lambda)Af(-\lambda)$. Lösen Sie die Differentialgleichung, die Sie durch $\frac{d}{d\lambda}f(\lambda)$ erhalten.

(e) Bringen Sie mit Hilfe von (d) $\psi_\lambda(x,t)$ in die Form $\psi_\lambda(x,t) = \tilde{N}(t)e^{\lambda(t)(a^\dagger + a)}\varphi_0$ und bestimmen Sie die Normierungskonstante $\tilde{N}(t)$.

(f) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi_\lambda(x,t)|^2$ eines kohärenten Zustands dispersionsfrei ist. Welches Wellenpaket ergibt sich? *Hinweis:* Ersetzen Sie $a^\dagger + a$ wieder durch den Ortsoperator und schlussendlich durch den Ort im Ortsraum.

(g) Durch welchen Grenzübergang erhält man klassische Oszillationen?

Aufgabe 2: Geladener harmonischer Oszillator **2+2+4 = 8 Punkte**

Ein geladener harmonischer Oszillator mit Ladung q, Masse m und Kreisfrequenz ω befindet sich in einem elektrischen Feld $E(t)$ parallel zur Oszillatorachse. Der Hamilton-Operator hat die Form

$$H(t) = H_0 + W(t) \qquad \text{mit} \qquad W(t) = -qE(t)X\,,$$

wobei H_0 den Hamilton-Operator aus der vorherigen Aufgabe bezeichnet und für $W(t)$ das Korrespondenzprinzip verwendet wurde, der Ort wurde demnach mit dem Ortsoperator ersetzt.

(a) Geben Sie $H(t)$ als Funktion der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a^\dagger$ und a an und berechnen Sie die Kommutatoren $[a, H(t)]$ und $[a^\dagger, H(t)]$.

(b) $\alpha(t)$ sei der Erwartungswert des Vernichtungsoperators a bezüglich eines (normierten, kohärenten) Zustandes $\psi(t)$ gemäß $\alpha(t) = \langle\psi(t)|a|\psi(t)\rangle$. Zeigen Sie, dass $\alpha(t)$ die folgende Differentialgleichung erfüllt

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = -i\omega\alpha(t) + i\lambda(t) \qquad \text{mit} \qquad \lambda(t) = \frac{qE(t)}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,.$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung für beliebiges $\lambda(t)$. *Hinweis:* Nutzen Sie die Zeitentwicklung für Erwartungswerte gemäß Gleichung (5.153) der Vorlesung. Finden Sie die allgemeine homogene und eine spezielle Lösung (involviert Integral $\int_0^t \lambda(t')e^{i\omega t'}dt'$).

(c) Wir betrachten die erzwungene Schwingung unter dem Einfluß des Feldes $\omega' \neq \omega$

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ E_0\cos(\omega' t) & \text{für } 0 < t < T \\ 0 & \text{für } t > T \end{cases}\,.$$

Für $t = 0$ sei der Oszillator im bekannten Grundzustand $\psi(0) = \varphi_0$ des harmonischen Oszillators. Bestimmen Sie $\alpha(t)$ aus der vorherigen Teilaufgabe in den drei angegebenen Zeitbereichen. Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle X\rangle(t)$ und $\langle H\rangle(t)$ bezüglich des kohärenten Zustandes. Vergleichen Sie z.B. mit der klassischen Erwartung für $0 < t \leq T$ gegeben durch $x(t) = \frac{qE_0}{m}\frac{1}{\omega^2-\omega'^2}(\cos\omega' t - \cos\omega t)$.

Aufgabe 3: Von Deutungen zu Drehungen **Präsenzaufgabe**

Diese Aufgabe ist nicht schriftlich einzureichen. Die zwei Teilaufgaben sind unabhängig zu bearbeiten und je eine 10-15 minütige Präsentation wert.

(a) Stellen Sie einige Anwendungsbeispiele des harmonischen Oszillators in der Atom- und Molekülphysik vor. *Hinweis:* Werfen Sie z.B. einen Blick in Cohen-Tannoudji.

(b) Stellen Sie den klassischen Drehimpuls und das Drehmoment vor. Zeigen Sie in der Hamilton-Mechanik die Poisson-Klammern aus Drehimpuls und Ort sowie Impuls auf. Erklären Sie weiterhin den Übergang von kartesischen zu Kugelkoordinaten und schreiben Sie den Nabla-Operator in Kugelkoordinaten. *Hinweis:* Diese Überlegungen werden bei der Diskussion des Wasserstoffatoms hilfreich sein.