Ausgabe: 22.06.20
Abgabe: 29.06.20
Besprechung: 01.07.20

Gesamtpunktzahl: **20 Punkte**

Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu)

Aufgabe 1: Kohärente Zustände **1+2+2+2+2+2+1 = 12 Punkte**

Gegeben sei ein eindimensionaler, harmonischer Oszillator mit Auf- und Absteigeoperatoren $a^\dagger$ und a mit $[a, a^\dagger] = 1$. Der Hamilton-Operator lässt sich schreiben in der Form $H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$ und die Eigenzustände von H zu den Energieeigenwerten $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ lassen sich gemäß $\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n\varphi_0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ aus dem Grundzustand gewinnen. Wir betrachten nun folgende, spezielle Überlagerung von Eigenzuständen (kohärente Zustände)

$$\psi_\lambda = N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\varphi_n \qquad \text{mit} \qquad \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass ψ_λ ein Eigenzustand zum Absteige- oder Vernichtungsoperator a ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.

(b) Die Zeitentwicklung der Zustände φ_λ ergibt sich aus der bekannten Zeitentwicklung der stationären Zustände φ_n. Geben Sie die Lösung $\psi_\lambda(x,t)$ der zeitabhängigen Schrödingergleichung an. Führen Sie die Größe $\lambda(t) = \lambda e^{-i\omega t}$ ein. Normieren Sie die Zustände und bestimmen Sie so N. *Hinweis:* Sie sollten $N = e^{-|\lambda|^2/2}$ erhalten.

(c) Berechnen Sie für die kohärenten Zustände $\psi_\lambda(x,t)$ die Orts- und Impulserwartungswerte $\langle X \rangle (t) = \langle \psi_\lambda(x,t)|X|\psi_\lambda(x,t)\rangle$ und $\langle P_x \rangle (t)$ und vergleichen Sie mit den Ergebnissen des klassischen Oszillators auf dem letzten Übungsblatt. *Hinweis:* Schreiben Sie Orts- und Impulsoperator in Form von a und $a^\dagger$. Nutzen Sie $\lambda(t) = |\lambda|e^{-i\omega t + i\delta}$.

(d) Zeigen Sie mit Hilfe der Baker-Hausdorff-Formel von Blatt 5, dass für zwei Operatoren A und B mit $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$ die Beziehung $e^{\lambda(A+B)} = e^{\lambda A}e^{\lambda B}e^{-\lambda^2[A,B]/2}$ gilt. *Hinweis:* Definieren Sie $f(\lambda) = e^{\lambda(A+B)}$ und starten Sie mit $f(\lambda)Af(-\lambda)$. Lösen Sie die Differentialgleichung, die Sie durch $\frac{d}{d\lambda}f(\lambda)$ erhalten.

(e) Bringen Sie mit Hilfe von (d) $\psi_\lambda(x,t)$ in die Form $\psi_\lambda(x,t) = \tilde{N}(t)e^{\lambda(t)(a^\dagger + a)}\varphi_0$ und bestimmen Sie die Normierungskonstante $\tilde{N}(t)$.

(f) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi_\lambda(x,t)|^2$ eines kohärenten Zustands dispersionsfrei ist. Welches Wellenpaket ergibt sich? *Hinweis:* Ersetzen Sie $a^\dagger + a$ wieder durch den Ortsoperator und schlussendlich durch den Ort im Ortsraum.

(g) Durch welchen Grenzübergang erhält man klassische Oszillationen?

Lösung der Aufgabe 1

(a) Man erhält beispielsweise

$$
\begin{aligned}
a\psi_\lambda &= aN\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\varphi_n = N\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}a\varphi_n \\
&= N\frac{\lambda^0}{\sqrt{0!}}a\varphi_0 + N\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\sqrt{(n-1)!}}\frac{1}{\sqrt{n}}a\varphi_n \\
&= \lambda N\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}}\varphi_{n-1} = \lambda N\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\varphi_n = \lambda\psi_\lambda
\end{aligned}
$$

Hierbei wurde verwendet, dass $a\varphi_0 = 0$ und $\varphi_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n!}}a\varphi_n$ gilt. Alternativ kann man auch $[a,(a^\dagger)^n] = n(a^\dagger)^{n-1}$ und $a\varphi_0 = 0$ benutzen und rechnen

$$
\begin{aligned}
a\psi_\lambda &= N\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}a(a^\dagger)^n\varphi_0 \\
&= N\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}n(a^\dagger)^{n-1}\varphi_0 = \lambda N\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}(a^\dagger)^{n-1}\varphi_0 = \lambda\psi_\lambda
\end{aligned}
$$

Somit ist ψ_λ ein Eigenzustand des Vernichtungsoperators mit Eigenwert λ.

(b) Wir erinnern uns daran, dass der Separationsansatz $\psi(x,t) = \varphi(x)\Phi(t)$ in der Schrödingergleichung $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = H\psi(x,t)$ auf die Gleichung $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t) = E_n\Phi(t)$ führt und daher auf den Zeitentwicklungsoperator $U_n = e^{-iE_nt/\hbar}$, der sich für jeden Eigenzustand φ_n unterscheidet. Konkret folgt hier $U_n = e^{-i\omega nt}e^{-i\omega t/2}$ aufgrund von $E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ und somit

$$
\begin{aligned}
\psi_\lambda(x,t) &= N\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\varphi_n e^{-iE_nt/\hbar} \\
&= N\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}}\varphi_n e^{-i\omega t/2} = Ne^{-i\omega t/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda(t)^n}{\sqrt{n!}}\varphi_n\,.
\end{aligned}
$$

Auch hier gilt wieder $a\psi_\lambda(x,t) = \lambda(t)\psi_\lambda(x,t)$. Wir möchten die Zustände noch normieren. Es ist

$$
\begin{aligned}
1 = \langle\psi_\lambda(x,t)|\psi_\lambda(x,t)\rangle &= |N|^2e^{i\omega t/2}e^{-i\omega t/2}\left\langle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda(t))^n}{\sqrt{n!}}\varphi_n\Big|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda(t))^m}{\sqrt{m!}}\varphi_m\right\rangle \\
&= |N|^2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda^*(t))^n(\lambda(t))^m}{\sqrt{n!}\sqrt{m!}}\langle\varphi_n|\varphi_m\rangle = |N|^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda(t)|^{2n}}{n!} = |N|^2e^{|\lambda(t)|^2}\,.
\end{aligned}
$$

Hierbei wurde $\langle\varphi_n|\varphi_m\rangle = \delta_{nm}$ benutzt. Somit ist $N(t) = e^{-|\lambda|^2/2}$, die Zeitabhängigkeit aus $|\lambda(t)| = |\lambda|^2$ fällt heraus.

(c) Nun sind die Orts- und Impulsmittelwerte im zeitabhängigen kohärenten Zustand $\psi_\lambda(x,t)$ zu berechnen. Dazu sei angemerkt, dass man den Ortsoperator schreiben kann in der Form

$X=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger+a)=:\frac{1}{\sqrt{2}}x_0(a^\dagger+a)$. Damit folgt für den Mittelwert des Ortsoperators

$$\begin{aligned}\langle X\rangle_{\psi_\lambda}&=\langle\psi_\lambda(x,t)|X|\psi_\lambda(x,t)\rangle\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}x_0\left(\langle\psi_\lambda(x,t)|a^\dagger\psi_\lambda(x,t)\rangle+\langle\psi_\lambda(x,t)|a\psi_\lambda(x,t)\rangle\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}x_0\left(\langle a\psi_\lambda(x,t)|\psi_\lambda(x,t)\rangle+\langle\psi_\lambda(x,t)|a\psi_\lambda(x,t)\rangle\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}x_0\left(\lambda^*(t)+\lambda(t)\right)\langle\psi_\lambda(x,t)|\psi_\lambda(x,t)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}x_0\left(\lambda^*(t)+\lambda(t)\right).\end{aligned}$$

Hierbei wurde benutzt, dass der kohärente Zustand normiert ist. Wir schreiben die komplexe Zahl λ in der Form $\lambda=|\lambda|e^{i\delta}$, so dass $\lambda(t)=|\lambda|e^{-i\omega t+i\delta}$. Dann wird aus dem Mittelwert des Ortsoperators

$$\langle X\rangle_{\psi_\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2}}x_0|\lambda|\left(e^{i\omega t-i\delta}+e^{-i\omega t+i\delta}\right)=\sqrt{2}x_0|\lambda|\cos(\omega t-\delta)\,.$$

Dies entspricht der klassichen Oszillation auf dem letzten Übungsblatt, auf dem wir $x(t)=A\sin(\omega t)$ erhalten haben. Dabei ist hier $A=\sqrt{2}x_0|\lambda|$ und $\delta=\frac{\pi}{2}$. Zur Berechnung des Mittelwerts des Impulsoperators benutzen wir $P_x=i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a^\dagger-a)=im\omega\frac{1}{\sqrt{2}}x_0(a^\dagger-a)$ und erhalten damit

$$\begin{aligned}\langle P_x\rangle_{\psi_\lambda}&=\langle\psi_\lambda(x,t)|P_x|\psi_\lambda(x,t)\rangle\\&=im\omega\frac{1}{\sqrt{2}}x_0(\lambda^*(t)-\lambda(t))=im\omega\frac{1}{\sqrt{2}}x_0|\lambda|(e^{i\omega t-i\delta}-e^{-i\omega t+i\delta})\\&=-\sqrt{2}m\omega x_0|\lambda|\sin(\omega t-\delta)=Am\omega\cos(\omega t)\,,\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt wieder $A=\sqrt{2}x_0|\lambda|$ und $\delta=\frac{\pi}{2}$ gesetzt haben, so dass wir exakt das klassiche Verhalten des letzten Übungsblattes reproduzieren. Wie in der Klassik gilt $\langle P_x\rangle_{\psi_\lambda}=m\frac{d}{dt}\langle X\rangle_{\psi_\lambda}$ im Einklang mit dem Ehrenfest-Theorem.

(d) Wir erinnern an die Baker-Hausdorff-Formel, die gegeben war durch

$$e^{\tilde{A}}\tilde{B}e^{-\tilde{A}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}C_n$$

mit den linearen Operatoren $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ sowie den Operatoren $C_0=\tilde{B}$ und $C_n=\left[\tilde{A},C_{n-1}\right]$ $(n=1,2,\ldots)$. Wir definieren $f(\lambda)=e^{\lambda(A+B)}$. Dann liefert die Baker-Hausdorff-Formel für den Ausdruck

$$f(\lambda)Af(-\lambda)=A+\lambda[A+B,A]=A-\lambda[A,B]\,,$$

denn $C_0=A$, $C_1=[\lambda(A+B),A]=\lambda[A+B,A]=\lambda[B,A]=-\lambda[A,B]$ und $C_2=[\lambda(A+B),C_1]=-\lambda^2[A+B,[A,B]]=0$ wegen der Annahme. Gleiches gilt für alle höheren C_n. Daraus folgt

$$f(\lambda)A=Af(\lambda)-\lambda[A,B]f(\lambda)\,.$$

Wir differenzieren $f(\lambda)$ nach λ und erhalten mit vorheriger Formel

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = f(\lambda)(A+B) = Af(\lambda) + f(\lambda)B - \lambda[A,B]f(\lambda)\,.$$

Dies wird offensichtlich gelöst durch

$$f(\lambda) = e^{\lambda A}e^{\lambda B}e^{-\lambda^2/2[A,B]}\,.$$

(e) Wir fassen nochmal zusammen, dass die zeitabhängigen Lösungen der Schrödingergleichung von der Form

$$\psi_\lambda(x,t) = Ne^{-i\omega t/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda(t)^n}{\sqrt{n!}}\varphi_n = Ne^{-i\omega t/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda(t)^n}{n!}(a^\dagger)^n\varphi_0 = Ne^{-i\omega t/2}e^{\lambda(t)a^\dagger}\varphi_0$$

sind. Nun folgt mit der Beziehung aus der vorherigen Teilaufgabe

$$e^{\lambda(t)(a^\dagger+a)} = e^{\lambda(t)a^\dagger}e^{\lambda(t)a}e^{-\lambda^2(t)[a^\dagger,a]/2} = e^{\lambda(t)a^\dagger}e^{\lambda(t)a}e^{\lambda^2(t)/2}\,.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} e^{-\lambda^2(t)/2}e^{\lambda(t)(a^\dagger+a)}\varphi_0 &= e^{-\lambda^2(t)/2}e^{\lambda^2(t)/2}e^{\lambda(t)a^\dagger}e^{\lambda(t)a}\varphi_0 \\ &= e^{\lambda(t)a^\dagger}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda(t))^n}{n!}a^n\varphi_0}_{=\varphi_0} = e^{\lambda(t)a^\dagger}\varphi_0\,. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die Lösungen

$$\psi_\lambda(x,t) = Ne^{-i\omega t/2}e^{-\lambda^2(t)/2}e^{\lambda(t)(a^\dagger+a)}\varphi_0\,.$$

Wir identifizieren $\tilde{N}(t) = Ne^{-i\omega t/2}e^{-\lambda(t)^2/2} = e^{-i\omega t/2}e^{-\lambda(t)^2/2}e^{-|\lambda|^2/2}$. Der Phasenfaktor $e^{-i\omega t/2}$ ist physikalisch irrelevant und könnte auch weggelassen werden. Wir benötigen in der nächsten Teilaufgabe $\tilde{N}^*(t)\tilde{N}(t)$. Es ist

$$\tilde{N}(t) = \exp\left(-\tfrac{1}{2}|\lambda|^2(1+e^{2(-i\omega t+i\delta)})\right) = \exp\left(-\tfrac{1}{2}|\lambda|^2(1+\cos(-2\omega t+2\delta)+i\sin(-2\omega t+2\delta))\right)$$

und somit

$$\tilde{N}^*(t)\tilde{N}(t) = \exp\left(-|\lambda|^2(1+\cos(-2\omega t+2\delta))\right) = \exp\left(-|\lambda|^2 2\cos^2(\omega t-\delta)\right)\,.$$

(f) Der entscheidende Kniff ist nun, dass $a^\dagger + a = \sqrt{2}\frac{1}{x_0}X = (a^\dagger+a)^*$ auf den Ortsoperator führt, der im Ortsraum schlicht x ist, für den also auch die Reihenfolge keine Rolle spielt. Wir erhalten daher

$$\begin{aligned} |\psi_\lambda(x,t)|^2 &= \tilde{N}(t)\tilde{N}^*(t)e^{\lambda(t)(a^\dagger+a)}\varphi_0 e^{\lambda^*(t)(a^\dagger+a)^*}\varphi_0^* \\ &= \exp\left(-|\lambda|^2 2\cos^2(\omega t-\delta)\right)\exp\left(\sqrt{2}\tfrac{x}{x_0}(\lambda(t)+\lambda^*(t))\right)\varphi_0^2 \end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass $\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}x_0}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{x_0^2}\right)$ reell ist. Weiter gilt $\lambda(t)+\lambda^*(t) = |\lambda|(e^{-i\omega t+i\delta} + e^{i\omega t-i\delta}) = |\lambda| 2\cos(\omega t - \delta)$. So bleibt

$$\begin{aligned}
|\psi_\lambda(x,t)|^2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}x_0} \exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right) \exp\left(2\sqrt{2}\frac{x}{x_0}|\lambda|\cos(\omega t-\delta)\right) \exp\left(-|\lambda|^2 2\cos^2(\omega t-\delta)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}x_0} \exp\left(-\frac{(x - x_0\sqrt{2}|\lambda|\cos(\omega t-\delta))^2}{x_0^2}\right) .
\end{aligned}$$

Dies ist ein Gauß'sches Wellenpaket. Hierbei ist $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Der Ausdruck $A = \sqrt{2}x_0|\lambda|$ ist wiederum die klassische Amplitude. Da die Breite konstant ist, ist das Wellenpaket dispersionsfrei.

(g) Im Limes großer Massen m wird $x_0 \to 0$ und das Wellenpaket wird zu einer δ-Distribution bei $x = A\cos(\omega t - \delta)$, es ergibt sich demnach die klassische Lösung.

Aufgabe 2: Geladener harmonischer Oszillator **2+2+4 = 8 Punkte**

Ein geladener harmonischer Oszillator mit Ladung q, Masse m und Kreisfrequenz ω befindet sich in einem elektrischen Feld $E(t)$ parallel zur Oszillatorachse. Der Hamilton-Operator hat die Form

$$H(t) = H_0 + W(t) \qquad \text{mit} \qquad W(t) = -qE(t)X\,,$$

wobei H_0 den Hamilton-Operator aus der vorherigen Aufgabe bezeichnet und für $W(t)$ das Korrespondenzprinzip verwendet wurde, der Ort wurde demnach mit dem Ortsoperator ersetzt.

(a) Geben Sie $H(t)$ als Funktion der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a^\dagger$ und a an und berechnen Sie die Kommutatoren $[a, H(t)]$ und $[a^\dagger, H(t)]$.

(b) $\alpha(t)$ sei der Erwartungswert des Vernichtungsoperators a bezüglich eines (normierten, kohärenten) Zustandes $\psi(t)$ gemäß $\alpha(t) = \langle\psi(t)|a|\psi(t)\rangle$. Zeigen Sie, dass $\alpha(t)$ die folgende Differentialgleichung erfüllt

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = -i\omega\alpha(t) + i\lambda(t) \qquad \text{mit} \qquad \lambda(t) = \frac{qE(t)}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,.$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung für beliebiges $\lambda(t)$. *Hinweis:* Nutzen Sie die Zeitentwicklung für Erwartungswerte gemäß Gleichung (5.153) der Vorlesung. Finden Sie die allgemeine homogene und eine spezielle Lösung (involviert Integral $\int_0^t \lambda(t')e^{i\omega t'}dt'$).

(c) Wir betrachten die erzwungene Schwingung unter dem Einfluß des Feldes $\omega' \neq \omega$

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ E_0\cos(\omega' t) & \text{für } 0 < t < T \\ 0 & \text{für } t > T \end{cases} .$$

Für $t = 0$ sei der Oszillator im bekannten Grundzustand $\psi(0) = \varphi_0$ des harmonischen Oszillators. Bestimmen Sie $\alpha(t)$ aus der vorherigen Teilaufgabe in den drei angegebenen Zeitbereichen. Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle X\rangle(t)$ und $\langle H\rangle(t)$ bezüglich des kohärenten Zustandes. Vergleichen Sie z.B. mit der klassischen Erwartung für $0 < t \leq T$ gegeben durch $x(t) = \frac{qE_0}{m}\frac{1}{\omega^2-\omega'^2}(\cos\omega' t - \cos\omega t)$.

Lösung der Aufgabe 2

(a) Aus der vorherigen Aufgabe ist $H_0 = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$ bekannt. Den Ortsoperator X können wir gemäß $X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a) = \frac{1}{\sqrt{2}}x_0(a^\dagger + a)$ durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ersetzen. Somit ist

$$H(t) = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) - qE(t)\frac{1}{\sqrt{2}}x_0(a^\dagger + a)\,.$$

Wir berechnen die Kommutatoren und erhalten

$$\begin{aligned}
[a, H(t)] &= \hbar\omega[a, a^\dagger]a - qE(t)\frac{1}{\sqrt{2}}x_0[a, a^\dagger] = \hbar\omega a - qE(t)\frac{1}{\sqrt{2}}x_0 \\
[a^\dagger, H(t)] &= a^\dagger\hbar\omega[a^\dagger, a] - qE(t)\frac{1}{\sqrt{2}}x_0[a^\dagger, a] = -\hbar\omega a^\dagger + qE(t)\frac{1}{\sqrt{2}}x_0\,.
\end{aligned}$$

(b) Wir erhalten für $\alpha(t)$ unter Benutzung der Relation

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle [A, H]\rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle$$

folgendes Resultat

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\alpha(t) &= \frac{d}{dt}\langle\psi(t)|a|\psi(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\psi(t)|[a, H(t)]|\psi(t)\rangle \\
&= \frac{1}{i\hbar}\left\langle\psi(t)|\hbar\omega a - qE(t)\frac{1}{\sqrt{2}}x_0|\psi(t)\right\rangle = -i\omega\langle\psi(t)|a|\psi(t)\rangle + i\frac{qE(t)}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \\
&= -i\omega\alpha(t) + i\lambda(t)
\end{aligned}$$

Wir betrachten zur Lösung zuerst die homogene Gleichung $\dot\alpha(t) = -i\omega\alpha(t)$, die gelöst wird durch $\alpha_h(t) = Ce^{-i\omega t}$ mit komplexem $C \in \mathbb{C}$. Wir brauchen nun eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung, für die wir den Ansatz $\alpha_s(t) = \kappa(t)e^{-i\omega t}$ wählen. Wir differenzieren und erhalten $\dot\alpha_s(t) = \dot\kappa(t)e^{-i\omega t} - i\omega\kappa(t)e^{-i\omega t}$. Wir schließen daraus, dass $\dot\kappa(t) = i\lambda(t)e^{i\omega t}$ sein muss, damit

$$\dot\alpha_s(t) = i\lambda(t)e^{i\omega t}e^{-i\omega t} - i\omega\kappa(t)e^{-i\omega t} = i\lambda(t) - i\omega\alpha_s(t)\,.$$

Damit folgt

$$\kappa(t) = i\int_0^t \lambda(t')e^{i\omega t'}dt'\,.$$

Somit ergibt sich als Gesamtlösung

$$\alpha(t) = Ce^{-i\omega t} + ie^{-i\omega t}\int_0^t \lambda(t')e^{i\omega t'}dt'\,.$$

(c) Ausgehend vom kohärenten Zustand der vorherigen Teilaufgabe gilt $\psi(0) = \varphi_0$ und weiter $a\psi(0) = a\varphi_0 = 0$ und somit $\alpha(0) = 0$. Wir berechnen $\alpha(t)$ für das konkrete Feld

$$\alpha(t) = Ce^{-i\omega t} + ie^{-i\omega t} \int_0^t \frac{q}{\sqrt{2m\hbar\omega}} E_0 \cos(\omega' t') e^{i\omega t'} dt' \,.$$

Wir benutzen

$$\int_0^t \cos(\omega' t') e^{i\omega t'} dt' = \frac{1}{\omega'^2 - \omega^2} (\omega' \sin\omega' t + i\omega \cos\omega' t) e^{i\omega t} - \frac{i\omega}{\omega'^2 - \omega^2} \,,$$

was sich durch zweifache partielle Integration zeigen lässt. Wir erhalten damit

$$\alpha(t) = Ce^{-i\omega t} + \frac{qE_0}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \frac{1}{\omega^2 - \omega'^2} \left(\omega\cos\omega' t - i\omega' \sin\omega' t - \omega e^{-i\omega t} \right) \,.$$

Die Konstante bestimmt sich aus $\alpha(0) = 0$ zu $C = 0$ und somit erhalten wir für $0 < t \leq T$

$$\alpha(t) = \frac{qE_0}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \frac{1}{\omega^2 - \omega'^2} (\omega\cos\omega' t - i\omega' \sin\omega' t - \omega e^{-i\omega t}) \,.$$

Außerdem ist $\alpha(t) = 0$ für $t \leq 0$ und für $t > T$ ergibt sich

$$\alpha(t) = \frac{qE_0}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \frac{1}{\omega^2 - \omega'^2} (\omega\cos\omega' T - i\omega' \sin\omega' T - \omega e^{-i\omega T}) e^{-i\omega(t-T)} \,.$$

Wir berechnen nun den Erwartungswert des Ortes im kohärenten Zustand. Es ist

$$\langle X \rangle (t) = \frac{1}{\sqrt{2}} x_0 \left\langle a^\dagger + a \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} x_0 (\left\langle a^\dagger \right\rangle + \langle a \rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} x_0 (\alpha^*(t) + \alpha(t)) = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \mathrm{Re}(\alpha(t)) \,.$$

Damit ergibt sich für den konkreten Fall des angegebenen Feldes für $t \leq 0$ $\langle X \rangle (t) = 0$ sowie für $t < 0 \leq T$

$$\begin{aligned} \langle X \rangle (t) &= \frac{qE_0}{m\omega} \frac{1}{\omega^2 - \omega'^2} (\omega\cos\omega' t - \omega\cos\omega t) \\ &= \frac{qE_0}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega'^2} (\cos\omega' t - \cos\omega t) \,. \end{aligned}$$

Weiter folgt für $t > T$

$$\langle X \rangle (t) = \frac{qE_0}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega'^2} \left[(\cos\omega' T - \cos\omega T) \cos(\omega(t-T)) + (\sin\omega T - \tfrac{\omega'}{\omega} \sin\omega' T) \sin(\omega(t-T)) \right] \,.$$

Dies deckt sich in allen Fällen mit der klassichen Erwartung. Wir berechnen weiterhin für $H(t) = H_0 - qE(t)X$ zuerst generisch

$$\begin{aligned} \langle H \rangle (t) &= \langle H_0 \rangle (t) - qE(t) \langle X \rangle (t) \\ \langle H_0 \rangle (t) &= \hbar\omega \left\langle a^\dagger a \right\rangle + \frac{1}{2}\hbar\omega = \hbar\omega |\alpha|^2 + \frac{1}{2}\hbar\omega \,. \end{aligned}$$

Für $t \leq 0$ und $t > T$ ist $E(t) = 0$ und es verbleibt nur der Anteil von $\langle H_0 \rangle (t)$. Somit ist für $t \leq 0$

$$\langle H \rangle (t) = \hbar\omega |\alpha(t \leq 0)|^2 + \frac{1}{2}\hbar\omega = \frac{1}{2}\hbar\omega \,.$$

Im Vergleich zum klassischen Resultat ist die Grundzustandsenergie nicht verschwindend. Weiter ist für $t > T$

$$
\begin{aligned}
\langle H \rangle (t) &= \hbar\omega|\alpha(t > T)|^2 + \frac{1}{2}\hbar\omega = \hbar\omega \left[(\mathrm{Re}\alpha)^2 + (\mathrm{Im}\alpha)^2\right] + \frac{1}{2}\hbar\omega \\
&= \frac{q^2E_0^2}{2m}\frac{1}{(\omega^2-\omega'^2)^2}\left[(\omega\cos\omega' T - \omega\cos\omega T)^2 + (\omega'\sin\omega' T - \omega\sin\omega T)^2\right] + \frac{1}{2}\hbar\omega\,.
\end{aligned}
$$

Tatsächlich entspricht auch dies dem klassichen Ausdruck, abgesehen von der Grundzustandsenergie $\frac{1}{2}\hbar\omega$. Zuletzt ergibt sich für $0 < t \leq T$ der Ausdruck

$$
\begin{aligned}
\langle H \rangle (t) &= \hbar\omega|\alpha(t)|^2 + \frac{1}{2}\hbar\omega - qE_0\cos\omega' t\,\langle X \rangle (t) \\
&= \frac{q^2E_0^2}{2m}\frac{1}{(\omega^2-\omega'^2)^2}\left[(\omega\cos\omega' t - \omega\cos\omega t)^2\right. \\
&\qquad \left. + (\omega'\sin\omega' t - \omega\sin\omega t)^2\right] + \frac{1}{2}\hbar\omega - qE_0\cos\omega' t\,\langle X \rangle (t)
\end{aligned}
$$