Karlsruhe Institute of Technology

Sommersemester 2020 - Blatt 11
Moderne Theoretische Physik I

Prof. Dr. M. M. Mühlleitner, Dr. S. Gieseke/Liebler

Ausgabe: 29.06.20
Abgabe: 06.07.20
Besprechung: 08.07.20

Gesamtpunktzahl: **20 Punkte**

Übungsbetreuung: Stefan Gieseke (stefan.gieseke@kit.edu)
Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu)

Präsenzaufgaben und Anmeldung zur "Vorleistung 1"

Da in den meisten Tutorien alle Studierenden eine Präsenzaufgabe vorgestellt haben, wird die Zahl der Präsenzaufgaben nun reduziert. Auf Blatt 12 und 13 folgen Präsenzaufgaben mit je nur einer Aufgabenstellung (Teilaufgabe).
Aufgrund einer Vielzahl an Nachmeldungen zur "Vorleistung 1" wurde die Anmeldefrist nun verlängert bis 06.07.2020. Bitte melden Sie sich an.

Aufgabe 1: Hermitesche (2×2)-Matrizen — **1+1+2+1+1+2 = 8 Punkte**

In dieser Aufgabe betrachten wir die Zerlegung einer hermiteschen (2×2)-Matrix in die Pauli-Matrizen und finden Eigenwerte und Eigenzustände. Wir starten mit einigen Vorüberlegungen zu den Pauli-Matrizen $\sigma_i (i = 1, 2, 3)$, definiert durch

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Verifizieren Sie für den Spezialfall $i = 1, j = 2$ die Beziehungen

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} := \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I}$$
$$[\sigma_i, \sigma_j] := \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

und damit auch $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathbb{I} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$. Hierbei ist $\mathbb{I}$ die (2×2)-Einheitsmatrix.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von Teilaufgabe (a), dass für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{C}^3$ mit komplexen Einträgen a_i, b_i die Identität $(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}\mathbb{I} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ gilt.

(c) Betrachten Sie den Raum der hermiteschen (2×2)-Matrizen mit komplexen Koeffizienten als 4-dimensionalen reellen Vektorraum mit der Basis $\{\mathbb{I}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Zeigen Sie, dass $\langle A|B\rangle = \frac{1}{2}\text{Spur}(AB)$ ein Skalarprodukt definiert und obige Basis zu einer Orthonormalbasis wird. *Hinweis:* Zeigen Sie zuerst, dass das Skalarprodukt reell, symmetrisch, linear und positiv ist. Nutzen Sie Teilaufgabe (a) zum Beweis der Orthonormalität.

(d) Zeigen Sie unter Verwendung von Teilaufgabe (c), dass eine hermitesche (2×2)-Matrix H in der Form $H = c_0 I + \vec{\sigma} \cdot \vec{c}$ mit $c_0, c_i \in \mathbb{C}$ geschrieben werden kann. Bestimmen Sie c_0 und c_i über das Skalarprodukt.

(e) Finden Sie die Eigenwerte von H, ausgedrückt durch c_0 und c_i. *Hinweis:* Sie können direkt rechnen, oder die Eigenschaften der Pauli-Matrizen nutzen. In letzterem Fall hilft die Formel $\det(A) = \frac{1}{2}(\text{Spur}(A)^2 - \text{Spur}(A^2))$.

(f) Fassen Sie die Koeffizienten c_i als Komponenten eines reellen Vektors $\vec{c}$ auf $(c_0 = 0)$ und führen Sie die Polarwinkel θ und ϕ ein gemäß $\vec{c} = |\vec{c}|(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$. Drücken Sie die Komponenten von $\vec{\sigma} \cdot \vec{c}$ durch $|\vec{c}|$ und die Winkel aus und bestimmen Sie die normierten Eigenvektoren dieser Matrix (und damit die Eigenvektoren von H). *Hinweis:* Sie sollten beispielsweise etwas von nachfolgender Form erhalten:

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \qquad \psi_2 = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: Spin in der Praxis **2+2 = 4 Punkte**

Wir möchten die mathematischen Erkenntnisse der letzten Aufgabe in zwei unabhängigen physikalischen Anwendungen diskutieren.

(a) Zeigen Sie, dass jedes Zwei-Zustandssystem mit spurfreiem Hamilton-Operator mathematisch äquivalent ist zu einem ruhenden Spin-1/2-Teilchen mit magnetischem Moment parallel zu seinem Spin, welches in einem externen magnetischen Feld ist und dessen Ortswellenfunktion vernachlässigbar sei.

(b) Finden Sie den Eigenzustand zum Eigenwert $+\frac{\hbar}{2}$ für die Spinkomponente in Richtung $\vec{e}_\theta$, ausgedrückt durch die Eigenzustände $|+\rangle$ und $|-\rangle$ der z-Komponente des Spins. $\vec{e}_\theta$ ist hier ein Einheitsvektor, der den Winkel θ mit der z-Achse einschließt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit im Zustand $|+\rangle$ einen Spin $+\frac{\hbar}{2}$ in Richtung $\vec{e}_\theta$ zu finden.

Aufgabe 3: Elektronspin **3+2+2+1 = 8 Punkte**

Bei einem Experiment stehe der Spin eines Elektrons unter der Einwirkung einer physikalischen Apparatur, welche so konstruiert ist, dass der Spin-Hamilton-Operator H in der Darstellung der Zustände $|+\rangle$ und $|-\rangle$ bezüglich S_z durch

$$\langle +|H|+\rangle = \langle -|H|-\rangle = 0, \qquad \langle +|H|-\rangle = \langle -|H|+\rangle = \hbar\omega_0$$

beschrieben werden kann. Hierbei sei ω_0 eine reelle Konstante der Dimension Zeit^{-1}.

(a) Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ sei der Spin im Zustand $|+\rangle$ orientiert. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich der Spin zu einem Zeitpunkt $t > t_0$ in diesem Zustand befindet. *Hinweis:* Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $W_+(t) = |\langle +|\chi(t)\rangle|^2$. Hierbei folgt $|\chi(t)\rangle$ durch Lösen der Schrödingergleichung $H|\chi(t)\rangle = i\hbar\frac{d}{dt}|\chi(t)\rangle$ mit der Anfangsbedingung $|\chi(0)\rangle = |+\rangle$. Schreiben Sie die Gleichung komponentenweise und lösen Sie die gekoppelte Differentialgleichung. Es folgt $W_+(t) = \cos^2(\omega_0 t)$.

(b) Ermitteln Sie die stationären Zustände des Systems (Eigenzustände von H) als Linearkombinationen der Vektoren $|+\rangle$ und $|-\rangle$. Wie lauten die zugehörigen Energien?

(c) Zu jedem Zeitpunkt $t \geq 0$ gibt es eine Richtung $\vec{e}(t)$ im Raum, für welche die Projektion des Spins die Unschärfe null besitzt. Ermitteln Sie $\vec{e}(t)$. *Hinweis:* Es ist $\vec{\sigma}\cdot\vec{e}\,|\chi(t)\rangle = |\chi(t)\rangle$ für $|\chi(t)\rangle = \cos(\omega_0 t)|+\rangle - i\sin(\omega_0 t)|-\rangle$ zu lösen. Warum?

(d) Welche Art von Experiment könnte diesen Effekt erzielen?

Aufgabe 4: Physik in der Praxis: Chemie **Präsenzaufgabe**

Diese Aufgabe ist nicht schriftlich einzureichen. Die zwei Teilaufgaben sind unabhängig zu bearbeiten und je eine 10-15 minütige Präsentation wert.

(a) Diskutieren Sie das Ammonium Molekül als Beispiel eines Zwei-Zustandssystems. *Hinweis:* Dies wird im Cohen-Tannoudji ausgeführt.

(b) Wiederholen Sie das Ihnen aus der Chemie bekannte Konzept von Orbitalen und deren Besetzungsregeln. *Hinweis:* Im Rahmen des Wasserstoffatoms werden diese Orbitale demnächst endlich quantenmechanisch motiviert.