Gesamtpunktzahl: **20 Punkte**

Übungsbetreuung: Stefan Gieseke (stefan.gieseke@kit.edu)
Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu)

Aufgabe 1: Hermitesche (2×2)-Matrizen — 1+1+2+1+1+2 = 8 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir die Zerlegung einer hermiteschen (2×2)-Matrix in die Pauli-Matrizen und finden Eigenwerte und Eigenzustände. Wir starten mit einigen Vorüberlegungen zu den Pauli-Matrizen $\sigma_i (i = 1, 2, 3)$, definiert durch

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Verifizieren Sie für den Spezialfall $i = 1, j = 2$ die Beziehungen

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} := \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I}$$
$$[\sigma_i, \sigma_j] := \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

und damit auch $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathbb{I} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$. Hierbei ist $\mathbb{I}$ die (2×2)-Einheitsmatrix.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von Teilaufgabe (a), dass für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{C}^3$ mit komplexen Einträgen a_i, b_i die Identität $(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}\mathbb{I} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ gilt.

(c) Betrachten Sie den Raum der hermiteschen (2×2)-Matrizen mit komplexen Koeffizienten als 4-dimensionalen reellen Vektorraum mit der Basis $\{\mathbb{I}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Zeigen Sie, dass $\langle A|B\rangle = \frac{1}{2}\text{Spur}(AB)$ ein Skalarprodukt definiert und obige Basis zu einer Orthonormalbasis wird. *Hinweis:* Zeigen Sie zuerst, dass das Skalarprodukt reell, symmetrisch, linear und positiv ist. Nutzen Sie Teilaufgabe (a) zum Beweis der Orthonormalität.

(d) Zeigen Sie unter Verwendung von Teilaufgabe (c), dass eine hermitesche (2×2)-Matrix H in der Form $H = c_0 I + \vec{\sigma} \cdot \vec{c}$ mit $c_0, c_i \in \mathbb{C}$ geschrieben werden kann. Bestimmen Sie c_0 und c_i über das Skalarprodukt.

(e) Finden Sie die Eigenwerte von H, ausgedrückt durch c_0 und c_i. *Hinweis:* Sie können direkt rechnen, oder die Eigenschaften der Pauli-Matrizen nutzen. In letzterem Fall hilft die Formel $\det(A) = \frac{1}{2}(\text{Spur}(A)^2 - \text{Spur}(A^2))$.

(f) Fassen Sie die Koeffizienten c_i als Komponenten eines reellen Vektors $\vec{c}$ auf $(c_0 = 0)$ und führen Sie die Polarwinkel θ und ϕ ein gemäß $\vec{c} = |\vec{c}|(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$. Drücken Sie die Komponenten von $\vec{\sigma} \cdot \vec{c}$ durch $|\vec{c}|$ und die Winkel aus und bestimmen Sie die normierten Eigenvektoren dieser Matrix (und damit die Eigenvektoren von H). *Hinweis:* Sie sollten beispielsweise etwas von nachfolgender Form erhalten:

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \qquad \psi_2 = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Lösung der Aufgabe 1

(a) Offenbar ist für $i = 1, j = 2$:

$$\{\sigma_1, \sigma_2\} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = 0$$

$$[\sigma_1, \sigma_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = 2i\sigma_3$$

Die letzte Relation $\sigma_i\sigma_j = i\epsilon_{ijk}\sigma_k + \mathbb{I}\delta_{ij}$ folgt aus Addition der beiden Gleichungen.

(b) Aus Teilaufgabe (a) folgt $\sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij} - \sigma_i\sigma_j$ und $\sigma_i^2 = I$. Damit ist:

$$\begin{aligned}
(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) &= (\sigma_1 a_1 + \sigma_2 a_2 + \sigma_3 a_3)(\sigma_1 b_1 + \sigma_2 b_2 + \sigma_3 b_3) \\
&= \sigma_1^2 a_1 b_1 + \sigma_2^2 a_2 b_2 + \sigma_3^2 a_3 b_3 + \sigma_1\sigma_2 a_1 b_2 + \sigma_1\sigma_3 a_1 b_3 \\
&\quad + \sigma_2\sigma_1 a_2 b_1 + \sigma_2\sigma_3 a_2 b_3 + \sigma_3\sigma_1 a_3 b_1 + \sigma_3\sigma_2 a_3 b_2 \\
&= I(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + i\sigma_3 a_1 b_2 - i\sigma_2 a_1 b_3 - i\sigma_3 a_2 b_1 + i\sigma_1 a_2 b_3 + i\sigma_2 a_3 b_1 - i\sigma_1 a_3 b_2 \\
&= I(\vec{a}\cdot\vec{b}) + i\sigma_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + i\sigma_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + i\sigma_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\
&= I(\vec{a}\cdot\vec{b}) + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})
\end{aligned}$$

(c) Wir zeigen zuerst, dass $\langle A|B\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Spur}(AB)$ ein Skalarprodukt für hermitesche Matrizen darstellt, denn

- $\langle\cdot|\cdot\rangle$ ist reell, denn

$$\langle A|B\rangle = \frac{1}{2}\left(A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}\right)$$

  und $A_{11}, A_{22}, B_{11}, B_{22} \in \mathbb{R}$, sowie $\overline{A}_{12} = A_{21}$ und $\overline{B}_{12} = B_{21}$ aufgrund von $A = A^\dagger$ und $B = B^\dagger$. Damit ist auch $A_{12}B_{21} + A_{21}B_{12} = A_{12}B_{21} + \overline{A_{12}B_{21}}$ reell.
- $\langle\cdot|\cdot\rangle$ ist symmetrisch, denn die Spur ist symmetrisch, also $\langle A|B\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Spur}(AB) = \frac{1}{2}\mathrm{Spur}(BA) = \langle B|A\rangle$.
- $\langle\cdot|\cdot\rangle$ ist linear, denn

$$\langle A + \lambda B|C\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Spur}\left((A+\lambda B)C\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Spur}(AC) + \lambda\frac{1}{2}\mathrm{Spur}(BC) = \langle A|C\rangle + \lambda\langle B|C\rangle\,.$$

- $\langle\cdot|\cdot\rangle$ ist positiv: Sei $A^\dagger = A$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von A. Dann ist

$$\langle A|A\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Spur}(A^2) = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \geq 0\,.$$

  Außerdem folgt aus $\langle A|A\rangle = 0$, dass auch die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 = 0$ sind und daher $A = 0$.

Nun bilden $\{\mathbb{I}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ eine Orthonormalbasis, denn

$$\langle \sigma_k | \sigma_l \rangle = \delta_{kl} \frac{1}{2} \mathrm{Spur}(\mathbb{I}) + i \sigma_m \epsilon_{klm} \mathrm{Spur}(\sigma_m) = \delta_{kl} \,,$$

aufgrund von $\mathrm{Spur}(\mathbb{I}) = 2$ und $\mathrm{Spur}(\sigma_m) = 0$. Weiterhin ist $\langle \mathbb{I} | \sigma_k \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Spur}(\sigma_k) = 0$ und $\langle \mathbb{I} | \mathbb{I} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Spur}(\mathbb{I}) = 1$.

(d) Jedes Element des Vekorraumes lässt sich eindeutig in der Basis $\{\mathbb{I}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ entwickeln. Unter Verwendung des Skalarprodukts gilt

$$H = \sum_{i=0}^{3} \langle b_i | H \rangle \, b_i \,,$$

wobei $b_0 = \mathbb{I}$ und $b_i = \sigma_i$. Konkret folgt somit hier

$$c_0 = \langle \mathbb{I} | H \rangle = \frac{1}{2} (H_{11} + H_{22}) \,, \qquad c_1 = \langle \sigma_1 | H \rangle = \frac{1}{2} (H_{12} + H_{21})$$
$$c_2 = \langle \sigma_2 | H \rangle = \frac{i}{2} (H_{12} - H_{21}) \,, \qquad c_3 = \langle \sigma_3 | H \rangle = \frac{1}{2} (H_{11} - H_{22}) \,.$$

(e) Die Eigenwerte von H ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
\det(H - \lambda \mathbb{I}) &= \det\left((c_0 - \lambda)\mathbb{I} + \sum_i c_i \sigma_i \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\mathrm{Spur}\left((c_0 - \lambda)\mathbb{I} + \sum_i c_i \sigma_i \right) \right]^2 - \frac{1}{2} \mathrm{Spur} \left[(c_0 - \lambda)\mathbb{I} + \sum_i c_i \sigma_i \right]^2 \\
&= \frac{1}{2} 4 (c_0 - \lambda)^2 - \frac{1}{2} 2 \left((c_0 - \lambda)^2 + \sum_i c_i^2 \right) = (c_0 - \lambda)^2 - \sum_i c_i^2 \overset{!}{=} 0
\end{aligned}$$

Somit sind die Eigenwerte $\lambda - c_0 = \pm \sqrt{\sum_i c_i^2}$, also $\lambda_{1,2} = c_0 \pm \sqrt{\sum_i c_i^2}$.

(f) Wir drücken $\vec{\sigma} \cdot \vec{c}$ aus durch den Betrag und die Winkel in der Form

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{c} = |\vec{c}| \left[\begin{pmatrix} 0 & \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\cos\phi & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & i\sin\theta\sin\phi \\ -i\sin\theta\sin\phi & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & -\cos\theta \end{pmatrix} \right] .$$

Aus der vorherigen Teilaufgabe lesen wir ab, dass die Eigenwerte von $\vec{\sigma} \cdot \vec{c}$ gegeben sind durch $\pm |\vec{c}|$. Dies führt auf die Eigenwertgleichung

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\cos\phi - i\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi + i\sin\theta\sin\phi & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Diese Gleichung führt auf

$$\begin{pmatrix} 1 & \tan\theta e^{-i\phi} \\ e^{i\phi}\tan\theta & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\cos\theta} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
$$\left(1 \mp \frac{1}{\cos\theta} \right) v_1 + \tan\theta e^{-i\phi} v_2 = 0$$

Zunächst setzen wir $v_2 = 1$, dann folgt

$$v_1 = -\frac{\sin\theta e^{-i\phi}}{\cos\theta(1 \mp \frac{1}{\cos\theta})} = -\frac{\sin\theta e^{-i\phi}}{\cos\theta \mp 1}\,.$$

Die Normierung liefert nun

$$|v_1|^2 + |v_2|^2 = \frac{\sin^2\theta}{(\cos\theta \mp 1)^2} + 1 = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta \mp 2\cos\theta + 1}{(\cos\theta \mp 1)^2} = \frac{2(1 \mp \cos\theta)}{(\cos\theta \mp 1)^2} = \frac{2}{1 \mp \cos\theta}$$

Somit verbleibt für die normierten Komponenten $\tilde{v}_1$ und $\tilde{v}_2$

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_1 &= -\sqrt{\frac{1 \mp \cos\theta}{2}}\frac{\sin\theta e^{-i\phi}}{\cos\theta \mp 1} = -e^{-i\phi}\sqrt{\frac{1 \pm \cos\theta}{2}} = e^{-i\phi}\begin{cases}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{cases}\\
\tilde{v}_2 &= \sqrt{\frac{1 \mp \cos\theta}{2}} = \begin{cases}\sin\frac{\theta}{2}\\ \cos\frac{\theta}{2}\end{cases}
\end{aligned}$$

Die Phase $e^{i\phi}$ kann, wie auch in der Angabe, anders verteilt werden.

Aufgabe 2: Spin in der Praxis

2+2 = 4 Punkte

Wir möchten die mathematischen Erkenntnisse der letzten Aufgabe in zwei unabhängigen physikalischen Anwendungen diskutieren.

(a) Zeigen Sie, dass jedes Zwei-Zustandssystem mit spurfreiem Hamilton-Operator mathematisch äquivalent ist zu einem ruhenden Spin-1/2-Teilchen mit magnetischem Moment parallel zu seinem Spin, welches in einem externen magnetischen Feld ist und dessen Ortswellenfunktion vernachlässigbar sei.

(b) Finden Sie den Eigenzustand zum Eigenwert $+\frac{\hbar}{2}$ für die Spinkomponente in Richtung $\vec{e}_\theta$, ausgedrückt durch die Eigenzustände $|+\rangle$ und $|-\rangle$ der z-Komponente des Spins. $\vec{e}_\theta$ ist hier ein Einheitsvektor, der den Winkel θ mit der z-Achse einschließt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit im Zustand $|+\rangle$ einen Spin $+\frac{\hbar}{2}$ in Richtung $\vec{e}_\theta$ zu finden.

Lösung der Aufgabe 2

(a) Ein Spin-1/2-Teilchen mit magnetischem Moment parallel zum Spin erfüllt $\vec{\mu} = \gamma\vec{S}$. Die Energie im externen Magnetfeld $\vec{B}$ ergibt sich dann nach $H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -\gamma\vec{S}\cdot\vec{B}$, solange das Teilchen ruht. In der Quantenmechanik ist nun $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ und somit wird $H = -\gamma\frac{\hbar}{2}\sum_i B_i\sigma_i$.
In einem Zwei-Zustandssystem kann H als 2×2 Matrix geschrieben werden. Da die Spur über H verschwinden soll, $\mathrm{Spur}(H) = 0$ folgt daher aus der letzten Aufgabe, dass $H = \sum_i c_i\sigma_i$.
Beide Systeme sind offenbar identisch unter der Identifikation $c_i = -\gamma\frac{\hbar}{2}B_i$.

(b) Es seien $|+\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $|-\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ die Eigenzustände zu $S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$ mit Eigenwerten $\pm\frac{\hbar}{2}$. Wir benötigen den Eigenvektor zum Eigenwert $\frac{\hbar}{2}$ von $\vec{S}\cdot\vec{e}_\theta$. Diesen haben wir in der letzten Aufgabe ausgerechnet. Wir legen $\vec{e}_\theta$ so, dass $\vec{e}_\theta = (\sin\theta, 0, \cos\theta)$. Dann ist der gesuchte Eigenvektor

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} .$$

Die Wahrscheinlichkeit ergibt sich zu $W = |\langle\psi_1|+\rangle|^2 = \cos^2\frac{\theta}{2}$.

Aufgabe 3: Elektronspin **3+2+2+1 = 8 Punkte**

Bei einem Experiment stehe der Spin eines Elektrons unter der Einwirkung einer physikalischen Apparatur, welche so konstruiert ist, dass der Spin-Hamilton-Operator H in der Darstellung der Zustände $|+\rangle$ und $|-\rangle$ bezüglich S_z durch

$$\langle+|H|+\rangle = \langle-|H|-\rangle = 0, \qquad \langle+|H|-\rangle = \langle-|H|+\rangle = \hbar\omega_0$$

beschrieben werden kann. Hierbei sei ω_0 eine reelle Konstante der Dimension Zeit^{-1}.

(a) Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ sei der Spin im Zustand $|+\rangle$ orientiert. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich der Spin zu einem Zeitpunkt $t > t_0$ in diesem Zustand befindet. *Hinweis:* Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $W_+(t) = |\langle+|\chi(t)\rangle|^2$. Hierbei folgt $|\chi(t)\rangle$ durch Lösen der Schrödingergleichung $H|\chi(t)\rangle = i\hbar\frac{d}{dt}|\chi(t)\rangle$ mit der Anfangsbedingung $|\chi(0)\rangle = |+\rangle$. Schreiben Sie die Gleichung komponentenweise und lösen Sie die gekoppelte Differentialgleichung. Es folgt $W_+(t) = \cos^2(\omega_0 t)$.

(b) Ermitteln Sie die stationären Zustände des Systems (Eigenzustände von H) als Linearkombinationen der Vektoren $|+\rangle$ und $|-\rangle$. Wie lauten die zugehörigen Energien?

(c) Zu jedem Zeitpunkt $t \geq 0$ gibt es eine Richtung $\vec{e}(t)$ im Raum, für welche die Projektion des Spins die Unschärfe null besitzt. Ermitteln Sie $\vec{e}(t)$. *Hinweis:* Es ist $\vec{\sigma}\cdot\vec{e}|\chi(t)\rangle = |\chi(t)\rangle$ für $|\chi(t)\rangle = \cos(\omega_0 t)|+\rangle - i\sin(\omega_0 t)|-\rangle$ zu lösen. Warum?

(d) Welche Art von Experiment könnte diesen Effekt erzielen?

Lösung der Aufgabe 3

(a) Wie angegeben ist zuerst $H|\chi(t)\rangle = i\hbar\frac{d}{dt}|\chi(t)\rangle$ mit der Anfangsbedingung $|\chi(0)\rangle = |+\rangle$ zu lösen. Unter Beachtung von $H = \hbar\omega_0\sigma_x$ folgt die Schrödingergleichung

$$\hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1(t) \\ \chi_2(t) \end{pmatrix} = i\hbar \begin{pmatrix} \dot\chi_1(t) \\ \dot\chi_2(t) \end{pmatrix} .$$

Diese lässt sich komponentenweise schreiben in der Form

$$\omega_0\chi_2(t) = i\dot\chi_1(t), \quad \omega_0\chi_1(t) = i\dot\chi_2(t), \quad \chi_1(0) = 1, \quad \chi_2(0) = 0 .$$

Entkoppeln der Gleichungen liefert

$$\ddot\chi_{1,2}(t) + \omega_0^2\chi_{1,2}(t) = 0 .$$

Die Anfangsbedingungen ergeben schließlich als Lösung

$$|\chi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) \\ -i\sin(\omega_0 t) \end{pmatrix} = \cos(\omega_0 t)|+\rangle - i\sin(\omega_0 t)|-\rangle\,.$$

Äußerst elegant kann dies auch gelöst werden unter Anwendung des Zeitentwicklungsoperators. Hierauf sei aber verzichtet. Für die zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit folgt

$$W_+(t) = |\langle +|\chi(t)\rangle|^2 = \cos^2(\omega_0 t)\,.$$

(b) Alle Pauli-Matrizen haben bekanntlich (sofort ersichtlich) die Eigenwerte ± 1. Wegen $H = \hbar\omega_0\sigma_x$ sind die Eigenzustände also die Eigenzustände zu σ_x. Diese folgen aus

$$\sigma_x|\psi\rangle = \pm|\psi\rangle$$

unter Beachtung von σ_x zu

$$|\psi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\alpha_\pm}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = e^{i\alpha_\pm}\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \pm |-\rangle) \quad .$$

Damit sind die Eigenwerte von H gegeben durch $E_\pm = \pm\hbar\omega_0$. Die Eigenzustände (inklusive Zeitabhängigkeit) folgen dann gemäß

$$|\chi_\pm(t)\rangle = e^{i\alpha_\pm}\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \pm |-\rangle)e^{\mp\omega_0 t}\,.$$

Die Phasen $\alpha_\pm$ bleiben hierbei unbestimmt.

(c) Im Zustand $|\chi\rangle$ verschwindet die Unschärfe genau dann, wenn der Zustand ein Eigenzustand des Operators $\vec{\sigma}\cdot\vec{e}$ ist. Wir ermitteln e_x, e_y und e_z durch Koeffizientenvergleich. Die Bestimmungsgleichung $\vec{\sigma}\cdot\vec{e}|\chi(t)\rangle = |\chi(t)\rangle$ für $|\chi(t)\rangle = \cos(\omega_0 t)|+\rangle - i\sin(\omega_0 t)|-\rangle$ liefert hier

$$\begin{aligned}&(-i\sin(\omega_0 t)(e_x - ie_y) + \cos(\omega_0 t)e_z)\,|+\rangle + (\cos(\omega_0 t)(e_x + ie_y) + i\sin(\omega_0 t)e_z)\,|-\rangle \\ &= \cos(\omega_0 t)|+\rangle - i\sin(\omega_0 t)|-\rangle\,.\end{aligned}$$

Zerlegung in Real- und Imaginärteil und Beachtung, dass $|\pm\rangle$ noch immer orthogonal und linear unabhängig sind, liefert $e_x(t) = 0$ und

$$\begin{aligned} -\sin(\omega_0 t)e_y + \cos(\omega_0 t)e_z &= \cos(\omega_0 t) \qquad |\cdot\cos(\omega_0 t) \\ \cos(\omega_0 t)e_y + \sin(\omega_0 t)e_z &= -\sin(\omega_0 t) \qquad |\cdot\sin(\omega_0 t)\,.\end{aligned}$$

Addition der beiden Gleichungen ergibt unter Beachtung von $\cos^2\phi - \sin^2\phi = \cos(2\phi)$

$$e_z(t) = \cos(2\omega_0 t)\,.$$

Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt unter Beachtung von $2\sin\phi\cos\phi = \sin(2\phi)$

$$-\sin(2\omega_0 t)e_y = 1 - \cos(2\omega_0 t)e_z = 1 - \cos^2(2\omega_0 t) = \sin^2(2\omega_0 t)\,.$$

Daraus folgt $e_y(t) = -\sin(2\omega_0 t)$. Somit gilt

$$\vec{e}(t) = (0, -\sin(2\omega_0 t), \cos(2\omega_0 t))^T\,.$$

Die Spitze des Vektors führt in der yz-Ebene eine Kreisbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit $2\omega_0$ aus.

(d) Eine physikalische Realisation wäre wie folgt: Durch einen Stern-Gerlach-Filter mit Feldgradientenrichtung in z-Richtung wird ein monoenergetischer Strahl von neutralen Atomen mit Spin $s = \frac{1}{2}$ so ausgerichtet, dass der zugehörige Spinzustand $|+\rangle$ ist (natürlich nur mit Wahrscheinlichkeit W_+).
Dann gelangen die Atome in einen Bereich mit homogenem zeitlich konstantem Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_x$, welches sie in der Zeit t durchlaufen und zeitgleich ihr Spin gemäß der Vorlesung und Teilaufgabe (c) eine Larmorpräzession erfährt.
Im Anschluss wird der Endzustand der Atome durch einen weiteren Stern-Gerlach-Filter getestet und die Intensität mit Hilfe eines Zählers gemessen.
Der Hamiltonoperator in diesem Beispiel wäre von der Form

$$H = \mu_B \vec{B} \cdot \vec{\sigma} = \mu_B B \sigma_x$$

mit der Larmorfrequenz $\omega_0 = \omega_L = \frac{\mu_B B}{\hbar}$.