Karlsruhe Institute of Technology

Sommersemester 2020 - Blatt 12
Moderne Theoretische Physik I

Prof. Dr. M. M. Mühlleitner, Dr. S. Gieseke

Ausgabe: 06.07.20
Abgabe: 13.07.20
Besprechung: 15.07.20

Gesamtpunktzahl: **20 Punkte**

Übungsbetreuung: Stefan Gieseke (stefan.gieseke@kit.edu)

Aufgabe 1: Translationsoperator — 3+3=6 Punkte

Untersuchen Sie den Translationsoperator

$$\mathcal{T}(\vec{\ell}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{P}\cdot\vec{\ell}\right) .$$

(a) Zeigen Sie für beliebige Funktionen F und G, die durch eine Potenzreihe darstellbar sind, aufgrund der fundamentalen Vertauschungsrelation zwischen Ort und Impuls die beiden Relationen

$$\left[X_i, G(\vec{P})\right] = i\hbar\frac{\partial G(\vec{P})}{\partial P_i} , \qquad \left[P_i, F(\vec{X})\right] = -i\hbar\frac{\partial F(\vec{X})}{\partial X_i} .$$

(b) Bestimmen Sie damit den Kommutator $[\,X_i, \mathcal{T}(\vec{\ell})\,]$.

(c) Wie ändert sich der Erwartungswert $\langle\,\vec{X}\,\rangle$ bezüglich eines Zustandes $|\,\psi\,\rangle$ mit einer Translation $|\,\psi'\,\rangle = \mathcal{T}(\vec{\ell})\,|\,\psi\,\rangle$?

Aufgabe 2: Darstellungen von Drehimpulsoperatoren — 1+2+3=6 Punkte

Eine übliche Darstellung der Drehimpulsoperatoren in 3 Dimensionen, die Sie auch in der Vorlesung kennengelernt haben, bekommt man direkt aus der Drehimpulsalgebra, wenn man in die $|\,jm\,\rangle$ Basis geht. Die Darstellungsmatrizen ℓ_i dieser Darstellung lauten dann

$$\ell_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} , \quad \ell_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix} , \quad \ell_z = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix} .$$

Andererseits bekommen Sie die folgenden Darstellungen der Generatoren G_i der Drehgruppe direkt aus den üblichen Drehmatrizen für räumliche Drehungen um die i-Achse,

$$G_x = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix} , \quad G_y = \begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix} , \quad G_z = \begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} .$$

(a) Zeigen Sie, dass die G_i aus der Entwicklung der üblichen Drehmatrizen mit ($\sin\alpha, \cos\alpha$ etc.) für kleine Drehwinkel folgen.

(b) Zeigen Sie, dass die G_i tatsächlich die Drehimpulsalgebra erfüllen.

(c) Auch die ℓ_i erfüllen natürlich die Drehimpulsalgebra. Daher müssen die ℓ_i und die G_i unitär äquivalent sein. Finden Sie die unitäre Transformation U, die die G_i in die ℓ_i überführt. Überprüfen Sie die Transformationen explizit, sobald Sie U gefunden haben.

Aufgabe 3: Drehoperatoren

3+5=8 Punkte

Wir betrachten allgemeine Drehungen um die Achse $\vec{\omega}$ mit dem Drehwinkel $\omega = |\vec{\omega}|$,

$$R(\vec{\omega})_{ij} = \frac{\omega_i\omega_j}{\omega^2} + \cos\omega\left(\delta_{ij} - \frac{\omega_i\omega_j}{\omega^2}\right) - \frac{\sin\omega}{\omega}\varepsilon_{ijk}\omega_k \ .$$

(a) Zeigen Sie, dass $R(\vec{\omega})R(-\vec{\omega}) = 1$.

(b) Zeigen Sie, dass sich der Ortsoperator $\vec{r}$ unter einer unitären Transformation

$$U(\vec{\omega}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\omega}\cdot\vec{L}}, \qquad \vec{L} = \vec{R}\times\vec{P}$$

unabhängig von der Darstellung bezüglich seiner Komponenten wie ein Vektor transformiert, also

$$U^\dagger(\vec{\omega})\,\vec{R}\,U(\vec{\omega}) = R(\vec{\omega})\,\vec{R} \ .$$

Verwenden Sie dazu das Baker–Hausdorff Theorem in der allgemeineren Fassung

$$e^B A e^{-B} = \sum_{n-0}^{\infty}\frac{1}{n!}A_n, \qquad A_n = [\,B, A_{n-1}\,], \qquad A_0 = A \ .$$

Aufgabe 4: Schwingers Oszillatormodell der Drehimpulse

Präsenzaufgabe

Wir untersuchen ein System von zwei unabhängigen harmonischen Oszillatoren (im folgenden durch +, - benannt) mit Erzeugungs– und Vernichtungsoperatoren $a_\pm^\dagger, a_\pm$, die die üblichen Vertauschungsrelationen erfüllen. Damit definieren wir die Operatoren

$$J_\pm = \hbar a_\pm^\dagger a_\mp, \qquad J_z = \frac{\hbar}{2}\left(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-\right), \qquad N = N_+ + N_- = a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- \ .$$

Zeigen Sie, dass die $J_\pm, J_z$ eine Drehimpulsalgebra erfüllen, also

$$[\,J_z, J_\pm\,] = \pm\hbar J_\pm, \qquad \left[\,\vec{J}^2, J_z\,\right] = 0, \qquad [\,J_+, J_-\,] = 2\hbar J_z \ .$$

Zeigen Sie weiterhin, dass

$$\vec{J}^2 = \hbar^2\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}+1\right) \ , \qquad (\vec{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2).$$

Damit müsste es also einen Zusammenhang zwischen der Besetzungszahldarstellung $|\,n_+, n_-\,\rangle$ und der Drehimpulsdarstellung $|\,j, m\,\rangle$ von Zuständen dieses Systems geben. Wie lautet dieser Zusammenhang und wie lassen sich damit Drehimpulse ganz allgemein deuten?