Karlsruhe Institute of Technology

Sommersemester 2020 - Blatt 13
Moderne Theoretische Physik I
Prof. Dr. M. M. Mühlleitner, Dr. S. Gieseke

Ausgabe: 13.07.20
Abgabe: 20.07.20
Besprechung: 22.07.20

Gesamtpunktzahl: **20 Punkte**

Übungsbetreuung: Stefan Gieseke (stefan.gieseke@kit.edu)

Aufgabe 1: Zeeman-Effekt — 10 Punkte

Untersuchen Sie den linearen (paramagnetischen) Zeeman-Effekt in ($2p \to 1s$) Übergängen des Wasserstoffatoms.

(a) Bestimmen Sie aus den Energieeigenwerten die möglichen Korrekturen der beteiligten Energieniveaus.

(b) Die Kopplung des Wasserstoffatoms an ein elektromagnetisches Feld und damit die Emission von Photonen erfolgt über den Dipoloperator $\vec{D} = q\vec{r}$. Welche Matrixelemente von den beteiligten Zuständen sind von Null verschieden und warum? Berechnen Sie die Matrixelemente für alle Komponenten x, y, z des Dipoloperators sowie alle möglichen Werte von m. Die Radialintegrale geben jeweils den gleichen Wert χ, den Sie nicht berechnen müssen.

(c) Wie lautet die Zeitentwicklung eines Zustandes $|\,\psi\,\rangle$, der bei $t = 0$ als eine Überlagerung aus einem $1s$ und einem $2p$ Zustand besteht,

$$|\,\psi(0)\,\rangle = \cos\alpha\,|\,\psi_{1s}\,\rangle + \sin\alpha\,|\,\psi_{2p}\,\rangle \ .$$

(d) Wie lautet der Erwartungswert des Dipoloperators als Funktion der Zeit, wenn jeweils eine magnetische Quantenzahl $m = -1, 0, 1$ angenommen wird?

(e) Diskutieren Sie das beobachtete Spektrum der Abstahlung für unterschiedeliche Beobachtungsrichtungen.

Aufgabe 2: Radiale Wellenfunktionen — 10 Punkte

Die radialen Wellenfunktionen des Wasserstoffatoms lauten mit $\rho = 2r/na_0$ und dem Bohrschen Radius a_0

$$R_{n\ell}(r) = \frac{2}{n^2}\sqrt{\frac{(n-\ell-1)!}{((n+\ell)!)^3}}a_0^{-3/2}\rho^\ell e^{-\rho/2}L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(\rho) \ ,$$

darin sind die Laguerre-Polynome

$$L_p^k(\rho) = \frac{(p+k)!}{p!}\frac{e^\rho}{\rho^k}\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\rho^p}\left(\rho^{p+k}e^{-\rho}\right) \ .$$

Die Laguerre-Polynome erfüllen die Orthogonalitätsrelation

$$\frac{p!}{((p+k)!)^3}\int_0^\infty \mathrm{d}\rho\,\rho^k e^{-\rho}L_p^k(\rho)L_{p'}^k(\rho) = \delta_{pp'} \ .$$

(a) Berechnen Sie für beliebige Zustände $|\, n\ell m \,\rangle$ den Erwartungswert

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle \ .$$

(b) Überprüfen Sie damit den Virialsatz

$$2\,\langle\, T \,\rangle = -\,\langle\, V \,\rangle \ .$$

Aufgabe 3: Aufenthaltswahrscheinlichkeiten **Präsenzaufgabe**

Diese Aufgabe ist nicht schriftlich einzureichen und eine 10-15 minütige Präsentation wert. Diskutieren Sie die räumliche Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Wasserstoff-Elektrons für gegebenes n, ℓ aber unbestimmtes m. Was folgern Sie für ein Atommodell oder ein Kernmodell, wenn die Kugelsymmetrie auch bei mehreren Teilchen gewahrt bleibt und die Wechselwirkung untereinander keinen Einfluss auf diese Symmetrie hätte? *Hinweis:* das Additionstheorem der Kugelflächenfunktionen ist hilfreich.