Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik I SS 2021

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Vanessa Gall, Dr. Roland Willa

Blatt 1
Abgabe 23.04.2021

---

1. Dirac Delta Distribution

Wir betrachten die Funktionenschar $\delta_\sigma(x) = \alpha e^{-x^2/\sigma^2}$ und wollen zeigen, dass diese im Limes $\sigma \to 0$ der Diracschen Distribution $\delta(x)$ entspricht. Letztere ist normiert und liefert die Werte ∞ für $x = 0$ und null anderenfalls ($x \neq 0$).

a) Bestimmen Sie α damit jede Funktion $\delta_\sigma(x)$ normiert ist gemäss

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta_\sigma(x) = 1. \tag{1}$$

b) Zeigen Sie, dass für jedes feste x der Grenzwert $\lim_{\sigma\to 0} \delta_\sigma(x) = \delta(x)$ erfüllt ist.

c) Leiten Sie mithilfe des Grenzverhaltens (f ist eine glatte Funktion)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta_\sigma(x) f(x) \to \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x) f(x) = f(0) \tag{2}$$

ein entsprechendes Verhalten für $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta'_\sigma(x) f(x)$ her. Können Sie das Ergebnis weiter verallgemeinern?

d) Beweisen Sie die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta[f(x)] = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \tag{3}$$

wobei x_i die einfachen Nullstellen der Funktion $f(x)$ sind.

2. Spektraldichte in einer Box

Betrachten Sie ein elektromagnetisches Feld in einer kubischen Box mit Volumen $V = L^3$. Eine einfache Abschätzung für die Anzahl freier elektromagnetischer Moden erhält man durch Forderung periodischer Randbedingungen an das Vektorpotential ($\omega_{\boldsymbol{k}} = c|\boldsymbol{k}|$)

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_{\boldsymbol{k}} t)}. \tag{4}$$

a) Zeigen Sie, dass diese Bedingung zu einer Quantisierung der $\boldsymbol{k}$-Zustände führt und bestimmen Sie diese. Konkret, zeigen Sie, dass gilt $\boldsymbol{k} = (2\pi/L)\boldsymbol{n}$ mit $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^3$.

b) Nutzen Sie die Quantisierungsbedingung aus a) um einen Ausdruck für die Anzahl Moden dN im Intervall $[k, k + dk]$ herzuleiten (es gilt $k = |\boldsymbol{k}|$). Beachten Sie dabei, dass das Vektorpotential transversal zum $\boldsymbol{k}$-Vektor liegt, d.h., $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{k} = 0$.

c) Berechnen Sie die spektrale Energiedichte $u(\omega)$ $\{u(\omega)d\omega$ ist die Energie pro Volumen im Intervall $[\omega, \omega + d\omega]\}$ im thermischen Gleichgewicht. Verwenden Sie dazu das klassische Äquipartitionsprinzip was besagt, dass jede Mode die Energie $k_B T$ beisteuert. Erklären Sie, warum das Ergebnis problematisch ist.

d) Das Plancksche Strahlungsgesetz

$$u(\omega) = \frac{\eta\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\eta\omega/k_B T} - 1} \tag{5}$$

umgeht das oben erwähnte Problem. Bestimmen Sie das Verhalten dieses Strahlungsgesetztes bei kleinen und grossen Frequenzen. Geben Sie die Einheiten von η an und interpretieren Sie die Grösse $\eta\omega$.

3. Erwartungswerte im Potentialtopf

Ein Teilchen sei in dem Intervall $[-L/2 - L/2]$ durch unendlich hohe Barrieren gefangen, d.h. $V(x) = 0$ für $|x| < L/2$, anderenfalls ist $V(x) = \infty$. Ausgehend von der $n$ten Lösung ψ_n der Schrödingergleichung (Vorlesungsskript Kapitel 1.4), definiert

$$\langle \hat{A} \rangle_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \psi_n^*(x) \hat{A} \psi_n(x) \tag{6}$$

den Erwartungswert eines Operators $\hat{A}$. Mithilfe der Ortsraumdarstellung $\hat{x} = x$ und $\hat{p} = -i\hbar\partial_x$ für Ort und Impuls,

a) bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle \hat{x} \rangle_n$, $\langle \hat{x}^2 \rangle_n$

b) bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle \hat{p} \rangle_n$, $\langle \hat{p}^2 \rangle_n$

c) bestimmen Sie die Einheiten und die n-Abhängigkeit des Produkts $\sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle_n \langle \hat{p}^2 \rangle_n}$