Moderne Theoretische Physik I SS 2021

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Vanessa Gall, Dr. Roland WillaBlatt 2
Abgabe 30.04.2021

1. Kommutatoren

Der Kommutator zweier Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ ist im Allgemeinen definiert als

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (1)$$

Wir möchten hier Kommutatoren des 3-dimensional Ortsoperators $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ und Impulsoperators $\hat{p} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3)$ berechnen, wobei in der Ortsraumdarstellung $\hat{x}_i = x_i$ und $\hat{p}_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}$ gilt.

- Beweisen Sie, dass für allgemeine Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$ die Relationen $[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$ und $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$ gelten.
- Verifizieren Sie die Eigenschaft $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$ aus der Vorlesung noch einmal explizit und berechnen Sie dann die Kommutatoren $[\hat{x}^2, \hat{x}_i]$ und $[\hat{x}_i, \hat{p}^2]$.
- Berechnen Sie den Kommutator $[\hat{T}, \hat{V}(x)]$, wobei $\hat{T} = \hat{p}^2/2m$ der Operator der kinetischen Energie und $\hat{V}(x) = \kappa\hat{x}^2/2$ das Potential sei.

2. Fouriertransformation

Wir verwenden die Fouriertransformation um vom Ortsraum in den Impulsraum (oder umgekehrt) zu wechseln. Die Impulsraumdarstellung der Funktion $f(x)$ ist gerade die Fouriertransformierte $\tilde{f}(k)$, die definiert ist als

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx}. \quad (2)$$

Die inverse Transformation ist gegeben durch

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}(k) e^{ikx}. \quad (3)$$

Somit ist $f(x)$ auch die Fouriertransformierte der Funktion $\tilde{f}(k)$ und insbesondere ihre Ortsraumdarstellung. Beachten Sie die Unterschiede im Exponenten und das zusätzliche 2π je nach Richtung der Transformation! Für die Fouriertransformation in der Zeit werden unterschiedliche Vorzeichen in den Exponenten verwendet (siehe weiter unten).

- Berechnen Sie die Fouriertransformation für $f_1(x) = \delta(x)$ und $\tilde{f}_2(k) = \delta(k)$.
- Berechnen Sie die Fouriertransformation für $f_3(x) = 1_x = 1$ und $\tilde{f}_4(k) = 1_k = 1$.
- Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte der Funktion $f_5(x) = (\frac{\partial}{\partial x} g(x))$ für allgemeines differenzierbares $g(x)$ gegeben ist durch

$$\tilde{f}_5(k) = ik\tilde{g}(k). \quad (4)$$

wobei $\tilde{g}(k)$ die Fouriertransformierte der Funktion $g(x)$ ist.

d) Die Fouriertransformierte der Funktion $\tilde{f}_6(k) = e^{-\frac{a}{2}k^2}$ ist gegeben durch

$$f_6(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{1}{2a}x^2}, \quad (5)$$

wobei $a \in \mathbb{C}$ und $\Re(a) \geq 0$ gilt. Beweisen Sie dies für reelles positives $a > 0$.

3. Greensche Funktion

Die Fouriertransformation einer Funktion $f(\mathbf{x}, t)$ (und ihr Inverses) in d räumlichen und einer zeitlichen Dimension sind definiert durch

$$f(\mathbf{k}, \omega) = \int d^d x \, dt \, e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} f(\mathbf{x}, t) \quad (6)$$

$$f(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d\omega}{(2\pi)} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} f(\mathbf{k}, \omega) \quad (7)$$

Gleichzeitig ist die Greensche Funktion eines linearen Operators $\mathcal{D}_{\mathbf{x},t}$ definiert durch die Beziehung $\mathcal{D}_{\mathbf{x},t}G(\mathbf{x}, t) = i\hbar\delta(\mathbf{x})\delta(t)$.

- Leiten Sie die *zeitunabhängige* Schrödingergleichung eines freien Teilchens in der Fourierdarstellung her, d.h., finden Sie die Bestimmungsgleichung für $\psi(\mathbf{k})$.
- Für die zeitabhängige Schrödingergleichung ist die (retardierte) Greensche Funktion (für $t > 0$) definiert als

$$[i\hbar\partial_t - \hat{H}]G(\mathbf{x}, t) = i\hbar\delta(\mathbf{x})\delta(t) \quad (8)$$

mit $\hat{H} = -(\hbar^2/2m)\nabla^2$. Zeigen Sie mittels inverser Fouriertransformation, dass die Greensche Funktion in der Fourierdarstellung die Form $G(\mathbf{k}, \omega) = \eta(\omega - \hbar k^2/2m)^{-1}$ besitzt und bestimmen Sie η .

- Nutzen Sie den Residuensatz um aus dem obigen Ergebnis $G(\mathbf{k}, t)$ zu berechnen. Das Ergebnis besitzt die Form $G(\mathbf{k}, t) \propto \exp[-i\nu k^2 t]$. Wenn Sie bei der Herleitung scheitern, diskutieren Sie die Einheiten von ν .

Tipp: Schieben Sie den Pol von der reellen Achse in die untere komplexe Halbebene $G(\mathbf{k}, \omega) \rightarrow \eta(\omega - \hbar k^2/2m + i\delta)^{-1}$. Für ein Integral entlang der Kontour Γ welche einen einfachen Pol einmal im Uhrzeigersinn umschließt ist (Residuensatz light)

$$\frac{-1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} dz \frac{f(z)}{z - \zeta} = f(\zeta). \quad (9)$$

- Berechnen Sie die Greensche Funktion $G(\mathbf{x}, t)$. Verwenden Sie obige Ergebnisse.
Tipp: Eine Gaußsche Verteilung wurde in Aufgabe 1 fouriertransformiert. Gehen Sie analog vor und lassen sich nicht von imaginären Koeffizienten verunsichern.