Moderne Theoretische Physik I SS 2021

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Vanessa Gall, Dr. Roland WillaBlatt 4
Abgabe 14.05.2021

1. Drehimpuls

Zeigen Sie, dass für den Drehimpulsoperator $\hat{\mathbf{L}} \equiv \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}}$ gilt

- jede Komponente $\hat{L}_\alpha$ von $\hat{\mathbf{L}}$ kommutiert mit $L^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$. Nutzen Sie dazu den total antisymmetrischen Levi-Civita Tensor ϵ_{ijk} , und dessen Eigenschaft $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \delta_{il}(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}) - \delta_{im}(\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kl}) + \delta_{in}(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})$.
- $\hat{\mathbf{L}}$ ist selbstadjungiert.
- wenn ψ_m ein Eigenzustand von $\hat{L}_z$ ist (d.h. $\hat{L}_z\psi_m = \hbar m\psi_m$), dann ist $\psi_\pm \equiv \hat{L}_\pm\psi_m$ auch einer. Hierbei ist $\hat{L}_\pm \equiv \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\psi_\pm$.

2. Bohr-Sommerfeld Quantisierung

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass der quantenmechanische harmonische Oszillator die Energieeigenwerte $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ besitzt. Hier betrachten wir eine frühe (inzwischen veraltete) Vorstellung der Quantenmechanik: die Bohr-Sommerfeld Quantisierung. Hierbei gelten die Regeln der klassischen Mechanik, wobei nur solchen Teilchenbahnen [im (x, p) Konfigurationsraum] erlaubt sind, die die Quantisierungsbedingung

$$J(E) = \oint_{\gamma_E} dx p = 2\pi n \hbar. \quad (1)$$

erfüllen. Das Integral wird auf einem geschlossenen Pfad γ_E im Phasenraum ausgeführt, wobei die Bahn einer klassischen Trajektorie bei konstanter Energie $H(x, p) = E$ entspricht. Hierzu betrachten wir die klassische Hamiltonfunktion

$$H(p, x) = p^2/2m + m\omega^2 x^2/2 \quad (2)$$

- Der Phasenraum lässt sich durch die Koordinate x parametrisieren. Nutzen Sie die Energieerhaltung um für ein festes E die klassischen Wendepunkte (d.h. Punkte mit $\dot{x} = 0$) und $p(x)$ zu finden. Wie sieht das Integral $J(E)$ aus?
- Werten Sie nun die Quantisierungsbedingung aus und bestimmen Sie die erlaubten Energien. Achten Sie darauf, den Phasenraum nur einmal zu durchlaufen.

3. WKB Näherung

Mit der Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) Näherung werden quantenmechanische Probleme in einer quasi-klassischer Näherung gelöst. Hierzu bringt man die Schrödinger-Gleichung auf die Form

$$\Psi''(x) + \frac{p^2(x)}{\hbar^2}\Psi(x) = 0 \quad (3)$$

und nutzt den Lösungsansatz $\Psi(x) = A(x)e^{\frac{i}{\hbar}\phi(x)}$, wobei $A(x)$ und $\phi(x)$ reelle Funktionen von x sind, die zu bestimmen sind. Wir wollen hier den quantenmechanischen harmonischen Oszillator betrachten mit

$$\mathcal{H} = \hat{p}^2/2m + m\omega^2\hat{x}^2/2. \quad (4)$$

- Bringen Sie die stationäre Schrödingergleichung des harmonischen Oszillators auf die Form in Gl. (20). Bestimmen Sie $p(x)$.
- Setzen Sie den Ansatz für $\Psi(x)$ in Gl. (20) ein, um Bestimmungsgleichungen für $A(x)$ und $\phi(x)$ zu erhalten. *Hinweis:* Mit $A(x)$ und $\phi(x)$ reell aber Gl. (20) komplex, können Sie Real- und Imaginärteil von Gl. (20) getrennt betrachten.
- Die quasi-klassische Näherung besteht darin, alle Terme von quadratischer (oder höherer) Ordnung in $\hbar$ zu vernachlässigen. Zeigen Sie, dass damit die Bestimmungsgleichungen die Form

$$A(x)(p^2(x) - \phi'(x)^2) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{1}{A(x)} \frac{d}{dx}(A^2(x)\phi'(x)) = 0 \quad (6)$$

annehmen und finden Sie $A(x)$ und $\phi(x)$ für die Anfangsbedingung $\phi(x=0) = 0$ $\Psi(x) = \Psi(-x)$ und $\Psi(x=0) = \Psi_0$.

- Man kann zeigen, dass die Wellenfunktion in dieser Näherung nach einer gesamten Umdrehung im Phasenraum die Form

$$\Psi(x') = e^{(\frac{i}{\hbar} \oint dx p) - i\pi} \Psi(x) \quad (7)$$

annehmen muss. Gleichzeitig darf sich die Wellenfunktion nach einer Umdrehung nicht ändern. Welche Quantisierungsbedingung erhalten Sie hiermit? Verwenden Sie $p(x)$ aus Aufgabenteil a) und berechnen Sie die quantisierten Energien E_n

4. (Anti-)Kommutator-Algebra: Teil II

Für einen Operator $\hat{A}$ sei $\Delta\hat{A} \equiv \hat{A} - \langle\hat{A}\rangle$, wobei $\langle\hat{A}\rangle \equiv \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$ der Erwartungswert von $\hat{A}$ in einem (nicht weiter spezifizierten) Zustand $|\psi\rangle$ ist.

- Zeigen Sie explizit, dass jeder Operator $\hat{C}$ in eine Summe eines hermiteschen (selbst-adjungierten, $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$) und eines schiefermiteschen Operators ($\hat{B}^\dagger = -\hat{B}$) zerfällt, d.h. $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$.
- Wie lautet die Adjungierte einer komplexen Zahl c .
- Für selbst-adjungierte Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$, bestimmen Sie die Eigenschaften der Adjungierten von i) $c\hat{A}$, ii) $\hat{A}\hat{B}$, iii) $[\hat{A}, \hat{B}]$, iv) $\{\hat{A}, \hat{B}\}$, v) $i[\hat{A}, \hat{B}]$ (c ist eine komplexe Zahl).
- Zeigen Sie, dass ein hermitescher (schiefermitescher) Operator $\hat{A}$ rein reelle (rein imaginäre) Erwartungswerte besitzt. Finden Sie dazu heraus, welche Eigenschaften die *Eigenwerte* von $\hat{A}$ besitzen.
- Leiten Sie die Beziehung $[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}] = [\hat{A}, \hat{B}]$ her.
- Anspruchsvoll!** Beweisen Sie die Schwarzsche Ungleichung $\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle \geq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2$. Nutzen Sie dazu die positiv-definite Eigenschaft des Skalarprodukts $\langle\gamma|\gamma\rangle \geq 0$ mit $|\gamma\rangle = |\alpha\rangle + c|\beta\rangle$.
- Anspruchsvoll!** Beweisen Sie die Unschärferelation $\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle|^2$, für selbst-adjungierte Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$.