Moderne Theoretische Physik I   SS 2021

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Vanessa Gall, Dr. Roland Willa

Blatt 4
Abgabe 14.05.2021

---

1. Drehimpuls

Zeigen Sie, dass für den Drehimpulsoperator $\hat{\boldsymbol{L}} \equiv \hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$ gilt

a) jede Komponente $\hat{L}_\alpha$ von $\hat{\boldsymbol{L}}$ kommutiert mit $L^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$. Nutzen Sie dazu den total antisymmetrischen Levi-Civita Tensor ϵ_{ijk}, und dessen Eigenschaft $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \delta_{il}(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}) - \delta_{im}(\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kl}) + \delta_{in}(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})$.

b) $\hat{\boldsymbol{L}}$ ist selbstadjungiert.

c) wenn ψ_m ein Eigenzustand von $\hat{L}_z$ ist (d.h. $\hat{L}_z\psi_m = \hbar m\psi_m$), dann ist $\psi_\pm \equiv \hat{L}_\pm\psi_m$ auch einer. Hierbei ist $\hat{L}_\pm \equiv \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\psi_\pm$.

Lösungsskizze:

a) Mit $\hat{\boldsymbol{p}} = -i\hbar\nabla$, lässt sich der Drehimpulsoperator kompakt schreiben als

$$\hat{L}_\alpha = -i\hbar\epsilon_{\alpha\beta\gamma}x_\beta\partial_\gamma \tag{1}$$

mit dem total antisymmetrischen Levi-Civita Tensor $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$. Eine Summe über doppelt auftretende Indices wird hier stillschweigend angenommen. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
[\hat{L}_\alpha, \hat{L}_{\alpha'}] &= -\hbar^2\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha'\beta'\gamma'}[x_\beta\partial_\gamma x_{\beta'}\partial_{\gamma'} - x_{\beta'}\partial_{\gamma'}x_\beta\partial_\gamma] && (2)\\
&= -\hbar^2\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha'\beta'\gamma'}[x_{\beta'}\partial_\gamma\delta_{\beta\gamma'} - x_\beta\partial_{\gamma'}\delta_{\beta'\gamma}] && (3)\\
&= i\hbar\epsilon_{\alpha\alpha'\gamma}\hat{L}_\gamma && (4)
\end{aligned}$$

Diese Schreibweise ergibt für die drei Komponenten (es gilt natürlich $[\hat{L}_\alpha, \hat{L}_\alpha] = 0$)

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z \qquad [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x \qquad [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y \tag{5}$$

Es genügt $[\hat{L}^2, \hat{L}_x] = 0$ zu zeigen. Die beiden anderen Eigenschaften folgen aus Symmetriegründen.

$$\begin{aligned}
[\hat{L}^2, \hat{L}_x] &= \hat{L}_y[\hat{L}_y, \hat{L}_x] + [\hat{L}_y, \hat{L}_x]\hat{L}_y + \hat{L}_z[\hat{L}_z, \hat{L}_x] + [\hat{L}_z, \hat{L}_x]\hat{L}_z && (6)\\
&= i\hbar[-\hat{L}_y\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{L}_y + \hat{L}_z\hat{L}_y + \hat{L}_y\hat{L}_z] = 0 && (7)
\end{aligned}$$

b) Wir schreiben

$$\begin{aligned}
\langle\varphi|L_\alpha\psi\rangle &= -i\hbar\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\int d\boldsymbol{x}\,\varphi(\boldsymbol{x})^* x_\beta\partial_\gamma\psi(\boldsymbol{x}) = i\hbar\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\int d\boldsymbol{x}\,[\partial_\gamma\varphi(\boldsymbol{x})^* x_\beta]\psi(\boldsymbol{x}) && (8)\\
&= i\hbar\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\int d\boldsymbol{x}\,(x_\beta\partial_\gamma\varphi(\boldsymbol{x})^*)\psi(\boldsymbol{x}) + i\hbar\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\int d\boldsymbol{x}\,\varphi(\boldsymbol{x})^*\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\gamma}\psi(\boldsymbol{x}) && (9)\\
&= \langle L_\alpha\varphi|\psi\rangle + i\hbar\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\delta_{\beta\gamma} && (10)
\end{aligned}$$

mit $\epsilon_{\alpha\beta\beta} = 0$ folgt das gewünschte Ergebnis, nämlich $\hat{\boldsymbol{L}}$ ist selbstadjungiert (hermitesch).

c) Wir wenden $\hat{L}_z$ auf $\psi_\pm$ an und finden

$$\hat{L}_z\psi_\pm = \hat{L}_z\hat{L}_\pm\psi_m = \hat{L}_z(\hat{L}_x \pm i\hat{L}_y)\psi_m = [(\hat{L}_x \pm i\hat{L}_y)\hat{L}_z \pm \hbar(\hat{L}_x \pm i\hat{L}_y)]\psi_m \tag{11}$$
$$= \hbar(m \pm 1)(\hat{L}_x \pm i\hat{L}_y) = \hbar(m \pm 1)\psi_\pm \tag{12}$$

Die Leiteroperatoren $\hat{L}_\pm$ liefern neue Eigenzustände des Drehimpulsoperators mit auf-/absteigenden Drehimpulsquantenzahlen $\hbar(m \pm 1)$.

2. Bohr-Sommerfeld Quantisierung

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass der quantenmechanische harmonische Oszillator die Energieeigenwerte $E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ besitzt. Hier betrachten wir eine frühe (inzwischen veraltete) Vorstellung der Quantenmechanik: die Bohr-Sommerfeld Quantisierung. Hierbei gelten die Regeln der klassischen Mechanik, wobei nur solchen Teilchenbahnen [im (x, p) Konfigurationsraum] erlaubt sind, die die Quantisierungsbedingung

$$J(E) = \oint_{\gamma_E} dx\, p = 2\pi n\hbar. \tag{13}$$

erfüllen. Das Integral wird auf einem geschlossenen Pfad γ_E im Phasenraum ausgeführt, wobei die Bahn einer klassischen Trajektorie bei konstanter Energie $H(x, p) = E$ entspricht. Hierzu betrachten wir die klassische Hamiltonfunktion

$$H(p, x) = p^2/2m + m\omega^2x^2/2 \tag{14}$$

a) Der Phasenraum lässt sich durch die Koordinate x parametrisieren. Nutzen Sie die Energieerhaltung um für ein festes E die klassischen Wendepunkte (d.h. Punkte mit $\dot{x} = 0$) und $p(x)$ zu finden. Wie sieht das Integral $J(E)$ aus?

b) Werten Sie nun die Quantisierungsbedingung aus und bestimmen Sie die erlaubten Energien. Achten Sie darauf, den Phasenraum nur einmal zu durchlaufen.

Lösungsskizze:

a) Klassische Wendepunkte zeichnen sich durch $\dot{x} = 0$ aus, also

$$E = m\omega^2x^2/2 \to x = \pm\sqrt{2E/m\omega^2}. \tag{15}$$

Aus der Energieerhaltung folgt zusätzlich

$$p(x) = \sqrt{2m(E - m\omega^2x^2/2)} \tag{16}$$

Somit erhalten wir

$$J(E) = 2\int_{-\sqrt{2E/m\omega^2}}^{\sqrt{2E/m\omega^2}} dx\, \sqrt{2m(E - m\omega^2x^2/2)}. \tag{17}$$

Der Faktor zwei ergibt sich, da der Weg einmal von links nach rechts und einmal umgekehrt durchlaufen werden muss.

b) Zur Auswertung von $J(E)$ führt die Substitution $\sqrt{m\omega^2/2E}x = \sin\phi$ zu

$$J(E) = 2\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sqrt{2mE}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \cos(\phi)^2 = \frac{2E\pi}{\omega} \tag{18}$$

und somit die Energien

$$E_n = \hbar\omega n. \tag{19}$$

3. WKB Näherung

Mit der Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) Näherung werden quantenmechanische Probleme in einer quasi-klassischer Näherung gelöst. Hierzu bringt man die Schrödingergleichung auf die Form

$$\Psi''(x) + \frac{p^2(x)}{\hbar^2}\Psi(x) = 0 \tag{20}$$

und nutzt den Lösungsansatz $\Psi(x) = A(x)e^{\frac{i}{\hbar}\phi(x)}$, wobei $A(x)$ und $\phi(x)$ reelle Funktionen von x sind, die zu bestimmen sind. Wir wollen hier den quantenmechanischen harmonischen Oszillator betrachten mit

$$\mathcal{H} = \hat{p}^2/2m + m\omega^2\hat{x}^2/2. \tag{21}$$

a) Bringen Sie die stationäre Schrödingergleichung des harmonischen Oszillators auf die Form in Gl. (20). Bestimmen Sie $p(x)$.

b) Setzen Sie den Ansatz für $\Psi(x)$ in Gl. (20) ein, um Bestimmungsgleichungen für $A(x)$ und $\phi(x)$ zu erhalten. *Hinweis:* Mit $A(x)$ und $\phi(x)$ reell aber Gl. (20) komplex, können Sie Real- und Imaginärteil von Gl. (20) getrennt betrachten.

c) Die quasi-klassische Näherung besteht darin, alle Terme von quadratischer (oder höherer) Ordnung in $\hbar$ zu vernachlässigen. Zeigen Sie, dass damit die Bestimmungsgleichungen die Form

$$A(x)(p^2(x) - \phi'(x)^2) = 0 \tag{22}$$

$$\frac{1}{A(x)}\frac{d}{dx}(A^2(x)\phi'(x)) = 0 \tag{23}$$

annehmen und finden Sie $A(x)$ und $\phi(x)$ für die Anfangsbedingung $\phi(x=0) = 0$ $\Psi(x) = \Psi(-x)$ und $\Psi(x=0) = \Psi_0$.

d) Man kann zeigen, dass die Wellenfunktion in dieser Näherung nach einer gesamten Umdrehung im Phasenraum die Form

$$\Psi(x') = e^{(\frac{i}{\hbar}\oint dx\, p)-i\pi}\Psi(x) \tag{24}$$

annehmen muss. Gleichzeitig darf sich die Wellenfunktion nach einer Umdrehung nicht ändern. Welche Quantisierungbesdingung erhalten Sie hiermit? Verwenden Sie $p(x)$ aus Aufgabenteil a) und berechnen Sie die quantisierten Energien E_n

Lösungsskizze:

a) Die stationäre Schrödingergleichung des harmonischen Oszillators ist

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\Psi''(x) + \frac{m\omega^2x^2}{2}\Psi(x) = E\Psi(x). \tag{25}$$

Umformen ergibt die Form (20) mit

$$p(x) = \pm\sqrt{2m(E - m\omega^2x^2/2)}. \tag{26}$$

b) Durch Einsetzen des Ansatzes erhält man

$$\frac{p^2(x)}{\hbar^2}A(x)e^{\frac{i}{\hbar}\phi(x)} + [A''(x) + 2A'(x)\frac{i\phi'(x)}{\hbar} + A(x)\frac{i\phi''(x)}{\hbar} + A(x)\frac{(i\phi'(x))^2}{\hbar^2}]e^{\frac{i}{\hbar}\phi(x)} = 0. \tag{27}$$

Da die Exponentialfunktion nie null ist und $A(x)$ und $\phi(x)$ reell sind, erhalten wir für den Realteil der Differentialgleichung

$$\hbar^2 A''(x) - A(x)(\phi'(x))^2 + A(x)p^2(x) = 0, \tag{28}$$

und für deren Imaginärteil

$$2A'(x)\phi'(x) + A(x)\phi''(x) = 0. \tag{29}$$

c) In der quasiklassischen Näherung vernachlässigt man den Term proportional zu $\hbar^2$ im Realteil der Bestimmungsgleichung. und erhält

$$A(x)(p^2(x) - \phi'(x)^2) = 0 \tag{30}$$

Da $A(x) = 0$ keine normierbare Lösung ist, erhalten wir hieraus

$$\phi'(x) = \pm p(x) \tag{31}$$

und mit der Anfangsbedingung

$$\phi(x) = \pm\int_0^x dyp(y). \tag{32}$$

Mit der Kettenregel kann man die Darstelung des Imaginärteils zeigen und die Lösung der resultierenden Differentialgleichung ist

$$A^2(x)[\pm p(x)] = C_\pm = \text{const.} \qquad \rightarrow \qquad A_\pm(x) = \sqrt{\pm C_\pm/p(x)} \tag{33}$$

Aus den Anfangswerten ergibt sich weiterhin

$$A_+(x) = A_-(x) = (\Psi_0/2)\sqrt{p(0)/p(x)} \tag{34}$$

und zu guter Letzt

$$\Psi(x) = \Psi_0\sqrt{p(0)/p(x)}\cos\Big[\frac{1}{\hbar}\int_0^x dyp(y)\Big]. \tag{35}$$

d) Damit $\Psi(x') = e^{(\frac{i}{\hbar}\oint dx\,p) - i\pi}\Psi(x) \overset{!}{=} \Psi(x)$ gilt, muss die Exponentialfunktion 1 sein,

$$(\frac{1}{\hbar}\oint dx\,p) - \pi = 2n\pi \rightarrow \oint dx\,p = (2n+1)\pi\hbar. \tag{36}$$

Das Integral haben wir bereits in Aufgabe 1 ausgewertet, wir erhalten also

$$\frac{2E\pi}{\omega} = (2n+1)\pi\hbar \rightarrow E_n = \hbar\omega(n + 1/2) \tag{37}$$

Dies sind die korrekten Eigenenergien des quantenmechanischen harmonischen Oszillators. Die WKB Methode ist hier exakt weil der harmonische Oszillator nur linear in $\hbar$ ist. Die Verbesserung zur Bohr-Sommerfeld Quantisierung kommt daher, dass die Wellenfunktion weiter ausgedehnt ist, als nur zwischen den klassischen Wendepunkten. An diesen Stellen versagt der Ansatz der WKB Näherung scheinbar [da $p(x) = 0$ an diesen Stellen]. Eine genauere mathematische Betrachtung ergibt, dass die Wellenfunktion, sobald sie einen klassischen Wendepunkt durchläuft, eine zusätzliche Phase von $\pi/2$ aufsammelt. Da es beim harmonischen Oszillator zwei klassische Wendepunkte gibt, führt das genau zur gegebenen Gesamtphase nach einer vollen Durchschreitung des Phasenraums.

4. (Anti-)Kommutator-Algebra: Teil II

Für einen Operator $\hat{A}$ sei $\Delta\hat{A} \equiv \hat{A} - \langle\hat{A}\rangle$, wobei $\langle\hat{A}\rangle \equiv \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$ der Erwartungswert von $\hat{A}$ in einem (nicht weiter spezifizierten) Zustand $|\psi\rangle$ ist.

a) Zeigen Sie explizit, dass jeder Operator $\hat{C}$ in eine Summe eines hermiteschen (selbst-adjungierten, $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$) und eines schiefhermiteschen Operators ($\hat{B}^\dagger = -\hat{B}$) zerfällt, d.h. $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$.

b) Wie lautet die Adjungierte einer komplexen Zahl c.

c) Für selbst-adjungierte Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$, bestimmen Sie die Eigenschaften der Adjungierten von i) $c\hat{A}$, ii) $\hat{A}\hat{B}$, iii) $[\hat{A}, \hat{B}]$, iv) $\{\hat{A}, \hat{B}\}$, v) $i[\hat{A}, \hat{B}]$ (c ist eine komplexe Zahl).

d) Zeigen Sie, dass ein hermitescher (schief-hermitescher) Operator $\hat{A}$ rein reelle (rein imaginäre) Erwartungswerte besitzt. Finden Sie dazu heraus, welche Eigenschaften die *Eigenwerte* von $\hat{A}$ besitzten.

e) Leiten Sie die Beziehung $[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}] = [\hat{A}, \hat{B}]$ her.

f) **Anspruchsvoll!** Beweisen Sie die Schwarzsche Ungleichung $\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle \geq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2$. Nutzen Sie dazu die positiv-definite Eigenschaft des Skalarprodukts $\langle\gamma|\gamma\rangle \geq 0$ mit $|\gamma\rangle = |\alpha\rangle + c|\beta\rangle$.

g) **Anspruchsvoll!** Beweisen Sie die Unschärferelation $\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle|^2$, für selbst-adjungierte Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$.

Lösungsskizze:

a) Es genügt explizite Ausdrücke für $\hat{A}$ und $\hat{B}$ zu finden. Dazu schreiben wir

$$\hat{C} = \hat{A} + \hat{B} \tag{38}$$

$$\hat{C}^\dagger = \hat{A}^\dagger + \hat{B}^\dagger = \hat{A} - \hat{B} \tag{39}$$

Summiert/Differenziert man die beiden Gleichungen erhält man

$$\hat{A} = (\hat{C} + \hat{C}^\dagger)/2 \tag{40}$$

$$\hat{B} = (\hat{C} - \hat{C}^\dagger)/2. \tag{41}$$

Damit ist das Gesuchte bewiesen.

b) Es gilt $c^\dagger = c^*$ wobei * die komplexe Konjugation ist.

c) i) Es gilt $(c\hat{A})^\dagger = c^*\hat{A}^\dagger = c^*\hat{A}$. Damit ist die Adjungierte von $c\hat{A}$ selbst-adjungiert (wenn c reell ist) oder schiefhermitesch wenn c rein imaginär ist. In allen anderen Fällen besitzt sie keine besondere Symmetrieeigenschaft.

ii) Es gilt $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger = \hat{B}\hat{A}$. Somit ist $\hat{A}\hat{B}$ selbst-adjungiert wenn $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$.

iii) Es gilt $([\hat{A}, \hat{B}])^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger - \hat{A}^\dagger\hat{B}^\dagger = -[\hat{A}, \hat{B}]$. Somit ist $[\hat{A}, \hat{B}]$ schiefhermitesch.

iv) Es gilt $(\{\hat{A}, \hat{B}\})^\dagger = (\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger + \hat{A}^\dagger\hat{B}^\dagger = \{\hat{A}, \hat{B}\}$. Somit ist $\{\hat{A}, \hat{B}\}$ hermitesch (selbst-adjungiert).

v) Es gilt $(i[\hat{A}, \hat{B}])^\dagger = i[\hat{A}, \hat{B}]$. Somit ist $i[\hat{A}, \hat{B}]$ hermitesch (selbst-adjungiert).

d) i) Für einen selbst-adjungierten Operator $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ ist bekannt, dass die Eigenwerte reell sind. Trotzdem sei dies hier nochmal gezeigt. Es gilt

$$\hat{A}|i\rangle = a_i|i\rangle \qquad \text{und} \qquad \langle i|\hat{A} = \langle i|\hat{A}^\dagger = a_i^*\langle i| \tag{42}$$

für den Eigenzustand $|i\rangle$ mit Eigenwert a_i. Nutzt man die Orthogonalität der Eigenzustände $\langle i|j\rangle = \delta_{i,j}$ dann gilt

$$\langle i|\hat{A}|j\rangle = a_j\langle i|j\rangle = a_i\delta_{i,j} \tag{43}$$

$$\langle i|\hat{A}|j\rangle = a_i^*\langle i|j\rangle = a_i^*\delta_{i,j} \tag{44}$$

Damit ist der Erwartungswert von $\hat{A}$ in jedem Eigenzustand reell ($a_i \in \mathbb{R}$). Für einen allgemeinen Erwartungswert schreiben wir

$$\langle\hat{A}\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \sum_{i,j}\langle\psi|i\rangle\langle i|\hat{A}|j\rangle\langle j|\psi\rangle = \sum_{i,j}\psi_i^* a_i\delta_{ij}\psi_j = \sum_i a_i|\psi_i|^2 \tag{45}$$

und finden ebenfalls nur reelle Erwartungswerte.

ii) Im schiefhermiteschen Fall $\hat{A}^\dagger = -\hat{A}$ gilt stattdessen

$$\hat{A}|i\rangle = a_i|i\rangle \qquad \text{und} \qquad \langle i|\hat{A} = -\langle i|\hat{A}^\dagger = -a_i^*\langle i| \tag{46}$$

für die Eigenzustände. Wir finden also nun

$$\langle i|\hat{A}|j\rangle = a_j\langle i|j\rangle = a_i\delta_{i,j} \tag{47}$$

$$\langle i|\hat{A}|j\rangle = -a_i^*\langle i|j\rangle = -a_i^*\delta_{i,j} \tag{48}$$

dass die Eigenwerte von $\hat{A}$ rein imaginär sind ($a_i \in i\mathbb{R}$). Daraus folgt dann auch

$$\langle\hat{A}\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \sum_{i,j}\langle\psi|i\rangle\langle i|\hat{A}|j\rangle\langle j|\psi\rangle = \sum_{i,j}\psi_i^* a_i\delta_{ij}\psi_j = \sum_i a_i|\psi_i|^2 \tag{49}$$

dass $\hat{A}$ in jedem Zustand einen rein imaginären Erwartungswert besitzt.

e) Nutzt man aus, dass $\langle\hat{A}\rangle$ und $\langle\hat{B}\rangle$ skalare Grössen sind findet man

$$[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [-\langle\hat{A}\rangle, \hat{B}] + [\hat{A}, -\langle\hat{B}\rangle] + [-\langle\hat{A}\rangle, -\langle\hat{B}\rangle] = [\hat{A}, \hat{B}] \tag{50}$$

f) Wir nutzen, dass $\langle\gamma|\gamma\rangle \geq 0$ für jedes $|\gamma\rangle$. Mit $|\gamma\rangle = |\alpha\rangle + c|\beta\rangle$ und $c \in \mathbb{C}$ gilt dann

$$(\langle\alpha| + c^*\langle\beta|)(|\alpha\rangle + c|\beta\rangle) \geq 0 \tag{51}$$

Wir wählen $c = -\langle\beta|\alpha\rangle/\langle\beta|\beta\rangle$ geschickt und finden

$$\langle\alpha|\alpha\rangle - \langle\alpha|\beta\rangle\frac{\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle} - \frac{\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}\langle\beta|\alpha\rangle + \frac{\langle\alpha|\beta\rangle\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle^2}\langle\beta|\beta\rangle \geq 0 \tag{52}$$

oder

$$\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle - 2|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 + |\langle\alpha|\beta\rangle|^2 \geq 0 \tag{53}$$

und damit auch die Schwarzsche Ungleichung $\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle \geq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2$.

g) Es sei hier $\langle\cdot\rangle$ der Erwartungswert eines Zustands $|\psi\rangle$. Wir definieren die neuen Zustände [$\Delta\hat{A}^\dagger = \Delta\hat{A}$ und $\Delta\hat{B}^\dagger = \Delta\hat{B}$ sind ebenfalls selbst-adjungiert]

$$|\alpha\rangle \equiv \Delta\hat{A}|\psi\rangle \implies \langle(\Delta\hat{A})^2\rangle = \langle\Delta\hat{A}^\dagger\Delta\hat{A}\rangle = \langle\alpha|\alpha\rangle \tag{54}$$

$$|\beta\rangle \equiv \Delta\hat{B}|\psi\rangle \implies \langle(\Delta\hat{B})^2\rangle = \langle\Delta\hat{B}^\dagger\Delta\hat{B}\rangle = \langle\beta|\beta\rangle \tag{55}$$

Die Schwarzsche Ungleichung besagt dann $\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq |\langle\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}\rangle|^2$. Weiter gilt

$$|\langle\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}\rangle|^2 = |\langle\frac{1}{2}([\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}] + \{\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}\})\rangle|^2 \tag{56}$$

$$= \frac{1}{4}|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle + \langle\{\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}\}\rangle|^2 \tag{57}$$

$$= \frac{1}{4}|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle\{\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}\}\rangle|^2 \geq \frac{1}{4}|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle|^2 \tag{58}$$

Hier haben wir Ergebnisse aus dem letzten Aufgabenblatt verwendet, nämlich [$\hat{A}\hat{B} = \frac{1}{2}([\hat{A},\hat{B}] + \{\hat{A},\hat{B}\})$, Teilaufgabe a)]. Ausserdem nutzten wir, dass $[\hat{A},\hat{B}]$ (schiefhermitesch) rein imaginäre Eigenwerte und $\{\hat{A},\hat{B}\}$ (hermitesch) reelle Eigenwerte besitzt. Somit ist die letzte Gleichung von der Form $|z|^2 = |x+iy|^2 = |x|^2 + |iy|^2$ mit $x = \langle\{\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}\}\rangle$ und $y = -i\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle$.