Moderne Theoretische Physik I SS 2021

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Vanessa Gall, Dr. Roland WillaBlatt 5
Abgabe 21.05.2021

Hinweis: Die Woche vom 24.-28. Mai ist vorlesungsfrei. Entsprechend erfolgt dann keine Abgabe. Das 6. Übungsblatt wird am 28. Mai veröffentlicht und ist am 4. Juni abzugeben.

1. Eindimensionale Schrödingergleichung

Betrachten Sie die Wellenfunktion

$$\psi(x) = A \frac{1 + ix/a}{1 + ix^2/a^2} \quad (1)$$

wobei a die Längenskala des Problems ist und A die zu bestimmende Normierungskonstante. Bestimmen Sie den Erwartungswert des Ortes $\langle \hat{x} \rangle$ und des Impulses $\langle \hat{p} \rangle$ eines Teilchens im Zustand $\psi(x)$. Kann $\psi(x)$ die Eigenfunktion einer eindimensionalen Schrödingergleichung sein? Wie sähe das zugehörige Potential aus?

2. Runge-Lenz Vektor und modifiziertes Coulomb Potential

In der Vorlesung haben Sie gelernt, wie die Eigenenergien des Wasserstoffatoms mit Hilfe der Schrödingergleichung gefunden werden können. Tatsächlich konnte Wolfgang Pauli diese Eigenenergien schon vor der Entwicklung der Schrödingergleichung aus reinen Symmetriebetrachtungen zeigen. Von essentieller Bedeutung hierbei ist eine weitere Symmetrie des Problems, nämlich die Erhaltung des Runge-Lenz Vektors $\hat{\mathbf{A}}$. Der quantenmechanische Runge-Lenz Vektor ist definiert als

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{L}} - \hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{p}}) + e^2 \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r}. \quad (2)$$

Wir betrachten ein modifiziertes, dreidimensionales Coulomb Problem mit

$$\hat{H} = \hat{\mathbf{p}}^2/2m - e^2/r^\alpha. \quad (3)$$

- a) Berechnen Sie zuerst $[\hat{p}_i, f(x)]$ und $[\hat{p}_i \hat{p}_j, f(x)]$ für allgemeines, zweimal differenzierbares $f(x)$. Betrachten Sie hierzu die Wirkung des Kommutators auf eine mindestens zweimal differenzierbare Testfunktion $\psi(x)$ um zu zeigen:

$$[p_i, f(x)] = -i\hbar \partial_i f(x) \quad (4)$$

$$[p_i p_j, f(x)] = -\hbar^2 \{\partial_i \partial_j f(x)\} - i\hbar \{\partial_i f(x)\} p_j + \{\partial_j f(x)\} p_i \quad (5)$$

- b) Zeigen Sie, dass jede Komponente des Runge Lenz Vektors genau dann mit dem gegebenen Hamiltonian kommutiert, wenn $\alpha = 1$. Verwenden Sie hierzu die Darstellung des Kreuzproduktes über den antisymmetrischen Tensor, i.e. $\hat{L}_k = \sum_{i,j} \varepsilon_{ijk} \hat{r}_i \hat{p}_j$ und die Eigenschaft $\sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} = \delta_{in} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jn}$. Tipp: sortieren Sie die verschiedenen Terme in Potenzen von m und $\hbar$. Die Koeffizienten von verschiedenen Ordnungen müssen jeweils einzeln verschwinden. Berücksichtigen Sie hierbei die zusätzlichen $\hbar$ aus den Kommutatoren aus 3a).

3. Drehimpulse

Diese Aufgabe widmet sich der algebraischen Verwendung von Drehimpulsen. Setzen Sie die Operatoren $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ ein und zeigen Sie, dass gilt $\hat{L}_\pm \hat{L}_\mp = \hat{\mathbf{L}}^2 - \hat{L}_z^2 \pm \hbar \hat{L}_z$.

- a) Wir betrachten einen Eigenzustand $|\ell, m\rangle$ von $\hat{\mathbf{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ mit zugehörigen Eigenwerten $\hbar^2 \ell(\ell + 1)$ und $\hbar m$. Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle \hat{L}_x \rangle$, $\langle \hat{L}_x^2 \rangle$ und $\langle \hat{L}_x \hat{L}_y + \hat{L}_y \hat{L}_x \rangle$ für diesen Zustand.
- b) Bestimmen Sie für den Spezialfall $\ell = 1$ und $m = 1$ mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Messung von $\hat{L}_x$ die Werte $\pm \hbar$ und 0 ergibt. Finden Sie dazu eine Darstellung $|1, m\rangle = \sum_\mu \lambda_{m\mu} |\chi_\mu\rangle$ in einer Basis $\{|\chi_\mu\rangle\}$ die eine Eigenbasis von $\hat{L}_x$ ist und berechnen Sie dann $\langle \chi_{\mu'} | \hat{L}_x | 1, m \rangle$ auf zwei verschiedene Arten. Beachten Sie auch, dass gilt $\langle 1, m | 1, m' \rangle = \delta_{mm'}$ und $\langle \chi_{\mu'} | \chi_\mu \rangle = \delta_{\mu\mu'}$.