Moderne Theoretische Physik I SS 2021

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Vanessa Gall, Dr. Roland Willa

Blatt 5
Abgabe 21.05.2021

Hinweis: Die Woche vom 24.-28. Mai ist vorlesungsfrei. Entsprechend erfolgt dann keine Abgabe. Das 6. Übungsblatt wird am 28. Mai veröffentlicht und ist am 4. Juni abzugeben.

1. Eindimensionale Schrödingergleichung

Betrachten Sie die Wellenfunktion

$$\psi(x) = A\frac{1 + ix/a}{1 + ix^2/a^2} \tag{1}$$

wobei a die Längenskala des Problems ist und A die zu bestimmende Normierungskonstante. Bestimmen Sie den Erwartungswert des Ortes $\langle \hat{x} \rangle$ und des Impulses $\langle \hat{p} \rangle$ eines Teilchens im Zustand $\psi(x)$. Kann $\psi(x)$ die Eigenfunktion einer eindimensionalen Schrödingergleichung sein? Wie sähe das zugehörige Potential aus?

Lösungsskizze:

Zunächst bestimmen wir A um die Wellenfunktion zu normieren mit der Substitution ($y = x/a$)

$$1 = \int dx\, |\psi(x)|^2 = |A|^2 a \int dy \frac{1 + y^2}{1 + y^4} = |A|^2 a\sqrt{2}\pi \tag{2}$$

Also ist $|A|^2 = 1/\sqrt{2}\pi a$. Da $|\psi(x)|^2$ eine gerade Funktion ist verschwindet der Mittelwert des Ortes $\langle \hat{x} \rangle = 0$. Für den Erwartungswert des Impulses berechnen wir zunächst

$$\hat{p}\psi(x) = \frac{\hbar A}{a}\frac{(2 + ix/a)x/a - 1}{((x/a)^2 - i)^2} \tag{3}$$

also

$$\langle \hat{p} \rangle = \frac{\hbar |A|^2}{a}\int dx \frac{1 - ix/a}{1 - ix^2/a^2}\frac{(2 + ix/a)x/a - 1}{(x^2/a^2 - i)^2} = \hbar|A|^2\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\hbar}{2a} \tag{4}$$

Die Wellenfunktion $\psi(x)$ ist keine Lösung einer eindimensionalen Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x), \tag{5}$$

da die zugehörige potentielle Energie

$$V(x) = E + \frac{\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x)}{\psi(x)}, \tag{6}$$

nicht rein reell ist.

2. **Runge-Lenz Vektor und modifiziertes Coulomb Potential**

In der Vorlesung haben Sie gelernt, wie die Eigenenergien des Wasserstoffatoms mit Hilfe der Schrödingergleichung gefunden werden können. Tatsächlich konnte Wolfgang Pauli diese Eigenenergien schon vor der Entwicklung der Schrödingergleichung aus reinen Symmetriebetrachtungen zeigen. Von essentieller Bedeutung hierbei ist eine weitere Symmetrie des Problems, nämlich die Erhaltung des Runge-Lenz Vektors $\hat{\boldsymbol{A}}$. Der quantenmechanische Runge-Lenz Vektor ist definiert als

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{2m}(\hat{\boldsymbol{p}} \times \hat{\boldsymbol{L}} - \hat{\boldsymbol{L}} \times \hat{\boldsymbol{p}}) - e^2 \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r}. \tag{7}$$

Wir betrachten ein modifiziertes, dreidimensionales Coulomb Problem mit

$$\hat{H} = \hat{\boldsymbol{p}}^2/2m - e^2/r^\alpha. \tag{8}$$

a) Berechnen Sie zuerst $[\hat{p}_i, f(x)]$ und $[\hat{p}_i\hat{p}_j, f(x)]$ für allgemeines, zweimal differenzierbares $f(x)$. Batrchten Sie hierzu die Wirkung des Kommutators auf eine mindestens zweimal differenzierbare Testfunktion $\psi(x)$ um zu zeigen:

$$[p_i, f(x)] = -i\hbar\partial_i f(x) \tag{9}$$
$$[p_i p_j, f(x)] = -\hbar^2\{\partial_i\partial_j f(x)\} - i\hbar(\{\partial_i f(x)\}p_j + \{\partial_j f(x)\}p_i) \tag{10}$$

b) Zeigen Sie, dass jede Komponente des Runge Lenz Vektors genau dann mit dem gegebenen Hamiltonian kommutiert, wenn $\alpha = 1$. Verwenden Sie hierzu die Darstellung des Kreuzproduktes über den antisymmetrischen Tensor, i.e. $\hat{L}_k = \sum_{i,j} \varepsilon_{ijk}\hat{r}_i\hat{p}_j$ und die Eigenschaft $\sum_k \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$. Tipp: sortieren Sie die verschiedenen Terme in Potenzen von m und $\hbar$. Die Koeffizienten von verschiedenen Ordnungen müssen jeweils einzeln verschwinden. Berücksichtigen Sie hierbei die zusätzlichen $\hbar$ aus den Kommutatoren aus 3a).

Lösungsskizze:

a) Aus Bequemlichkeit lassen wir hier Operatorsymbole weg. Zunächst berechnen wir

$$\begin{aligned}
[p_i, f(x)]\psi(x) &= -i\hbar\partial_i\{f(x)\psi(x)\} + i\hbar f(x)\partial_i\psi(x) && (11)\\
&= -i\hbar\{\partial_i f(x)\}\psi(x) - i\hbar f(x)\partial_i\psi(x) + i\hbar f(x)\partial_i\psi(x) && (12)\\
&\Rightarrow [p_i, f(x)] = -i\hbar\partial_i f(x) && (13)\\
[p_i p_j, f(x)]\psi(x) &= -\hbar^2\partial_i\partial_j\{f(x)\psi(x)\} + \hbar^2 f(x)\partial_i\partial_j\psi(x) && (14)\\
&= -\hbar^2\big(\{\partial_i\partial_j f(x)\}\psi(x) + \{\partial_i f(x)\}\{\partial_j\psi(x)\} && (15)\\
&+ \{\partial_j f(x)\}\{\partial_i\psi(x)\} + f(x)\partial_i\partial_j\psi(x)\big) + \hbar^2 f(x)\partial_i\partial_j\psi(x) && (16)\\
&\Rightarrow [p_i p_j, f(x)] = -\hbar^2\{\partial_i\partial_j f(x)\} - i\hbar\big(\{\partial_i f(x)\}p_j + \{\partial_j f(x)\}p_i\big) && (17)
\end{aligned}$$

b) Als nächstes schreiben wir

$$A_i = \frac{1}{2m}\sum_{jk} \varepsilon_{jki}(p_j L_k - L_j p_k) - e^2\frac{r_i}{r} = \frac{1}{2m}\sum_{jk} \varepsilon_{ijk}(p_j L_k + L_k p_j) - e^2\frac{r_i}{r}, \tag{18}$$

wobei die Antisymmetrie und Zyklizität in den Indizes verwendet wurde. Dann erhalten wir

$$[A_i, H] = [\frac{1}{2m}\sum_{jk}\varepsilon_{ijk}(p_jL_k + L_kp_j) - e^2\frac{r_i}{r}, \sum_l \frac{p_l^2}{2m} - \frac{e^2}{r^\alpha}] \tag{19}$$

$$= \frac{1}{4m^2}\sum_{jkl}\varepsilon_{ijk}[(p_jL_k + L_kp_j), p_l^2] \tag{20}$$

$$- \frac{e^2}{2m}\left(\sum_{jk}\varepsilon_{ijk}[(p_jL_k + L_kp_j), \frac{1}{r^\alpha}] + \sum_l[\frac{r_i}{r}, p_l^2]\right) + e^4[\frac{r_i}{r}, \frac{1}{r^\alpha}] \tag{21}$$

Da durch Kommutatoren keine zusätzlichen Potenzen von m erzeugt werden, müssen die verschiedenen Potenzen einzeln verschwinden. Der letzte Term ist trivial null. Der ersre Term ist

$$\frac{1}{4m^2}\sum_{jkl}\varepsilon_{ijk}[(p_jL_k + L_kp_j), p_l^2] = \frac{1}{4m^2}\sum_{jkl}\epsilon_{ijk}(4i\hbar\sum_n \varepsilon_{lnk}p_lp_np_j) \tag{22}$$

$$= \frac{4i\hbar}{4m^2}\sum_{jkln}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lnk}p_lp_np_j \tag{23}$$

$$= \frac{4i\hbar}{4m^2}\sum_{jln}(\delta_{il}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jl})p_lp_np_j = 0. \tag{24}$$

Der zweite und dritte Term sind von gleicher Potenz in m, wir erhalten:

$$- \frac{e^2}{2m}(\sum_{jk}\varepsilon_{ijk}[(p_jL_k + L_kp_j), \frac{1}{r^\alpha}] + \sum_l[\frac{r_i}{r}, p_l^2]) \tag{25}$$

$$= -\frac{e^2}{2m}(\sum_{jk}\sum_{mn}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk}[(p_jr_mp_n + r_mp_np_j), \frac{1}{r^\alpha}] + \sum_l[\frac{r_i}{r}, p_l^2]) \tag{26}$$

$$= -\frac{e^2}{2m}(\sum_{jk}\sum_{mn}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk}[(([p_j, r_m] + r_mp_j)p_n + r_mp_np_j), \frac{1}{r^\alpha}] + \sum_l[\frac{r_i}{r}, p_l^2]) \tag{27}$$

$$= -\frac{e^2}{2m}(\sum_{jk}\sum_{mn}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk}\{2r_m[p_np_j, \frac{1}{r^\alpha}] - i\hbar\delta_{jm}[p_n, \frac{1}{r^\alpha}]\} + \sum_l[\frac{r_i}{r}, p_l^2]) \tag{28}$$

Nun berechnen wir

$$[p_m, \frac{1}{r^\alpha}] = -i\hbar\partial_m\frac{1}{r^\alpha}, \tag{29}$$

$$[p_mp_j, \frac{1}{r^\alpha}] = -\hbar^2(\partial_m\partial_j)\frac{1}{r^\alpha} - i\hbar\{(\partial_m\frac{1}{r^\alpha})p_j + (\partial_j\frac{1}{r^\alpha})p_m\} \tag{30}$$

$$[\frac{r_i}{r}, p_l^2] = \hbar^2(\partial_l\partial_l)\frac{r_i}{r} + 2i\hbar\{(\partial_l\frac{r_i}{r})p_l\} \tag{31}$$

$$\partial_l\frac{r_i}{r} = \frac{\delta_{il}r - r_i\frac{r_l}{r}}{r^2} = \frac{\delta_{il}}{r} - \frac{r_ir_l}{r^3} \tag{32}$$

$$\partial_l^2\frac{r_i}{r} = 3\frac{r_ir_lr_l}{r^5} - 2\delta_{il}\frac{r_l}{r^3} - \frac{r_i}{r^3} \tag{33}$$

$$\partial_m\frac{1}{r^\alpha} = -\alpha\frac{r_m}{r^{\alpha+2}} \tag{34}$$

$$\partial_j\partial_m\frac{1}{r^\alpha} = -\alpha(\frac{\delta_{mj}}{r^{\alpha+2}} - (\alpha+2)\frac{r_mr_j}{r^{\alpha+4}}) \tag{35}$$

Durch die Ableitungen kommen keine weiteren Potenzen in $\hbar$ hinzu, deshalb muss jede Potenz einzeln verschwinden. Wir erhalten in linearer Ordnung

$$-\frac{e^2}{2m}\Big(\sum_{jk}\sum_{mn}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk}\{2r_m(-i\hbar)\{(\partial_n\frac{1}{r^\alpha})p_j+(\partial_j\frac{1}{r^\alpha})p_n\}\}+\sum_l 2i\hbar\{(\partial_l\frac{r_i}{r})p_l\}\Big) \tag{36}$$

$$\propto \Big(\sum_{jk}\sum_{mn}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk}\{r_m\{(\alpha\frac{r_n}{r^{\alpha+2}})p_j+(\alpha\frac{r_j}{r^{\alpha+2}})p_n\}\}+\sum_l\{(\frac{\delta_{il}}{r}-\frac{r_ir_l}{r^3})p_l\}\Big) \tag{37}$$

$$=\Big(\sum_j(+\alpha)\frac{r_ir_j}{r^{\alpha+2}}p_j\Big)-\alpha\frac{1}{r^\alpha}p_i+\frac{1}{r}p_i-\Big(\sum_l\frac{r_ir_l}{r^3}p_l\Big) \tag{38}$$

was nur für $\alpha=1$ verschwindet und in quadratischer Ordnung von $\hbar$

$$-\frac{e^2}{2m}\Big(\sum_{jk}\sum_{mn}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk}\{2r_m(-\hbar^2(\partial_n\partial_j)\frac{1}{r^\alpha})-i\hbar\delta_{jm}(-i\hbar\partial_n\frac{1}{r^\alpha})\}+\sum_l(\hbar^2(\partial_l\partial_l)\frac{r_i}{r})\Big) \tag{39}$$

$$\propto \sum_{jk}\sum_{mn}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk}\{2r_m(\alpha(\frac{\delta_{nj}}{r^{\alpha+2}}-(\alpha+2)\frac{r_nr_j}{r^{\alpha+4}}))-\delta_{jm}(-\alpha\frac{r_n}{r^{\alpha+2}})\} \tag{40}$$

$$+\sum_l(3\frac{r_ir_lr_l}{r^5}-2\delta_{il}\frac{r_l}{r^3}-\frac{r_i}{r^3}) \tag{41}$$

$$=\sum_{jk}\sum_{mn}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk}\{2\alpha r_m\frac{\delta_{nj}}{r^{\alpha+2}}-2\alpha(\alpha+2)r_m\frac{r_nr_j}{r^{\alpha+4}}+\alpha\delta_{jm}\frac{r_n}{r^{\alpha+2}}\}-2\frac{r_i}{r^3} \tag{42}$$

$$=(+2\alpha-2)\frac{r_i}{r^3}, \tag{43}$$

was wieder nur für $\alpha=1$ verschwindet. Zusätzlich haben wir verwendet, dass in drei Dimensionen $\sum_l\delta_{ll}=3$.

3. Drehimpulse

Diese Aufgabe widmet sich der algebraischen Verwendung von Drehimpulsen. Setzen Sie die Operatoren $\hat{L}_\pm=\hat{L}_x\pm i\hat{L}_y$ ein und zeigen Sie, dass gilt $\hat{L}_\pm\hat{L}_\mp=\hat{\boldsymbol{L}}^2-\hat{L}_z^2\pm\hbar\hat{L}_z$.

a) Wir betrachten einen Eigenzustand $|\ell,m\rangle$ von $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ mit zugehörigen Eigenwerten $\hbar^2\ell(\ell+1)$ und $\hbar m$. Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle\hat{L}_x\rangle$, $\langle\hat{L}_x^2\rangle$ und $\langle\hat{L}_x\hat{L}_y+\hat{L}_y\hat{L}_x\rangle$ für diesen Zustand.

b) Bestimmen Sie für den Spezialfall $\ell=1$ und $m=1$ mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Messung von $\hat{L}_x$ die Werte $\pm\hbar$ und 0 ergibt. Finden Sie dazu eine Darstellung $|1,m\rangle=\sum_\mu\lambda_{m\mu}|\chi_\mu\rangle$ in einer Basis $\{|\chi_\mu\rangle\}$ die eine Eigenbasis von $\hat{L}_x$ ist und berechnen Sie dann $\langle\chi_{\mu'}|\hat{L}_x|1,m\rangle$ auf zwei verschiedene Arten. Beachten Sie auch, dass gilt $\langle 1,m|1,m'\rangle=\delta_{mm'}$ und $\langle\chi_{\mu'}|\chi_\mu\rangle=\delta_{\mu\mu'}$.

Lösungsskizze:

a) Für die Leiteroperatoren $\hat{L}_\pm$ gelten die Eigenschaften (vgl. letztes Übungsblatt)

$$\hat{L}_+|\ell,m\rangle=\alpha_+|\ell,m+1\rangle \qquad \text{für } m<\ell \tag{44}$$

$$\hat{L}_-|\ell,m\rangle=\alpha_-|\ell,m-1\rangle \qquad \text{für } m>-\ell \tag{45}$$

Die Koeffizienten $\alpha_\pm$ ergeben sich aus der Bedingung

$$|\alpha_\pm|^2 = \langle \ell, m|\hat{L}_\pm^\dagger \hat{L}_\pm|\ell, m\rangle \tag{46}$$

Es gilt weiter $\hat{L}_\pm^\dagger = \hat{L}_\mp$, woraus sich durch Einsetzten und Ausmultiplizieren ergibt, dass $\hat{L}_\pm \hat{L}_\mp = (\hat{L}_x \pm i\hat{L}_y)(\hat{L}_x \mp i\hat{L}_y) = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 \mp i[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = \hat{\boldsymbol{L}}^2 - \hat{L}_z^2 \pm \hbar\hat{L}_z$. Damit ist $\alpha_\pm = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m\pm 1)}$. Beachten Sie, dass der Leiteroperator $\hat{L}_\pm$ den Zustand $|\ell, \pm\ell\rangle$ annihiliert. Damit gilt

$$\langle \hat{L}_x\rangle = \langle \ell, m|\hat{L}_x|\ell, m\rangle = \frac{1}{2}[\langle \ell, m|\hat{L}_+|\ell, m\rangle + \langle \ell, m|\hat{L}_-|\ell, m\rangle] \tag{47}$$

$$= \frac{1}{2}[\alpha_+\langle \ell, m|\ell, m+1\rangle + \alpha_-\langle \ell, m|\ell, m-1\rangle] = 0 \tag{48}$$

$$\langle \hat{L}_x^2\rangle = \frac{1}{4}\langle \ell, m|\hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_-\hat{L}_+|\ell, m\rangle = \frac{1}{2}\langle \ell, m|\hat{\boldsymbol{L}}^2 - \hat{L}_z^2|\ell, m\rangle = \frac{\hbar^2}{2}[\ell(\ell+1) - m^2] \tag{49}$$

$$\langle \hat{L}_x\hat{L}_y + \hat{L}_y\hat{L}_x\rangle = \frac{-i}{4}\langle \ell, m|(\hat{L}_+ + \hat{L}_-)(\hat{L}_+ - \hat{L}_-) + (\hat{L}_+ - \hat{L}_-)(\hat{L}_+ + \hat{L}_-)|\ell, m\rangle \tag{50}$$

$$= \frac{-i}{2}\langle \ell, m|\hat{L}_+^2 - \hat{L}_-^2|\ell, m\rangle = 0 \tag{51}$$

b) Es gibt im Sektor mit festem ℓ eine Basis $|\chi_\mu\rangle$ mit $\hat{\boldsymbol{L}}^2|\chi_\mu\rangle = \hbar^2\ell(\ell+1)|\chi_\mu\rangle$ und $\hat{L}_x|\chi_\mu\rangle = \hbar\mu|\chi_\mu\rangle$, $\mu \in \{-\ell, \dots \ell\}$. Für $\ell = 1$ schreiben wir dann $|1, m\rangle = \sum_\mu \lambda_{m\mu}|\chi_\mu\rangle$ mit $\lambda_{m\mu} = \langle\chi_\mu|1, 1\rangle$. Die Koeffizienten $\lambda_{m\mu}$ genügen wegen der Normierung $\sum_\mu \lambda_{m\mu}^*\lambda_{m'\mu} = \delta_{m,m'}$. Wir finden

$$\hat{L}_x|1, m\rangle = \sum\nolimits_\mu \lambda_{m\mu}\hbar\mu|\chi_\mu\rangle, \tag{52}$$

$$\langle 1, m|\hat{L}_x|1, m\rangle = \sum\nolimits_\mu |\lambda_{m\mu}|^2\hbar\mu \tag{53}$$

womit $|\lambda_{m\mu}|^2$ genau die Wahrscheinlichkeit ist, dass eine Messung von $\hat{L}_x$ auf dem Zustand $|1, m\rangle$ den Eigenwert $\hbar\mu$ ergibt. Es gilt weiter, dass $\hat{L}_x|1, m\rangle = (1/2)(\hat{L}_+ + \hat{L}_-)|1, m\rangle$ oder kompenentenweise

$$\sum\nolimits_\mu \lambda_{1\mu}\hbar\mu|\chi_\mu\rangle = \frac{1}{2}\hat{L}_-|1, 1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\hbar|1, 0\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\hbar\sum\nolimits_\mu \lambda_{0\mu}|\chi_\mu\rangle \tag{54}$$

$$\sum\nolimits_\mu \lambda_{0\mu}\hbar\mu|\chi_\mu\rangle = \frac{1}{2}(\hat{L}_+ + \hat{L}_-)|1, 0\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\hbar\sum\nolimits_\mu (\lambda_{1\mu} + \lambda_{-1\mu})|\chi_\mu\rangle \tag{55}$$

$$\sum\nolimits_\mu \lambda_{-1\mu}\hbar\mu|\chi_\mu\rangle = \frac{1}{2}\hat{L}_+|1, -1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\hbar|1, 0\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\hbar\sum\nolimits_\mu \lambda_{0\mu}|\chi_\mu\rangle \tag{56}$$

Wir führen nun einen Koeffizientenvergleich durch und finden

$$\lambda_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_{01} \qquad 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_{00} \qquad -\lambda_{1-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_{0-1} \tag{57}$$

$$\lambda_{01} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda_{11} + \lambda_{-11}) \quad 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda_{10} + \lambda_{-10}) \quad -\lambda_{0-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda_{1-1} + \lambda_{-1-1}) \tag{58}$$

$$\lambda_{-11} = \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_{01} \qquad 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_{00} \qquad -\lambda_{-1-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_{0-1} \tag{59}$$

Also ist

$$\begin{pmatrix} \lambda_{-1-1} & \lambda_{-10} & \lambda_{-11} \\ \lambda_{0-1} & \lambda_{00} & \lambda_{01} \\ \lambda_{1-1} & \lambda_{10} & \lambda_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{-1-1} & \lambda_{-10} & \lambda_{-11} \\ -\sqrt{2}\lambda_{-1-1} & 0 & \sqrt{2}\lambda_{-11} \\ \lambda_{-1-1} & -\lambda_{-10} & \lambda_{-11} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \tag{60}$$

Zum Schluss ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit im Zustand $|1,1\rangle$ ein $\hat{L}_x$ von $\pm\hbar$ zu messen $\lambda_{1,\pm 1}^2 = 1/4$. Die Wahrscheinlichkeit einen Drehimpuls $\hat{L}_x$ gleich Null zu finden ist $\lambda_{1,0}^2 = 1/2$.