

Moderne Theoretische Physik I SS 2021Prof. Dr. Jörg Schmalian
Vanessa Gall, Dr. Roland Willa**Blatt 6**
Abgabe 04.06.2021**1. 1d Potentialprobleme**

Wir betrachten zeitunabhängige Probleme in einer räumlichen Dimension. Folgende Aufgaben wiederholen und ergänzen Aufgaben aus der Vorlesung:

- Zeigen Sie, dass die Ableitung $\psi'(x)$ der Wellenfunktion an einer Potentialstufe stetig und an einem Delta-Potential unstetig ist. Integrieren Sie dazu die Schrödingergleichung über ein infinitesimales Intervall und nutzen aus, dass $\psi(x)$ stetig ist.
- Es sei das Potential $V(x) = V_0 \Theta(x)$ mit der Heaviside Funktion $\Theta(x)$. Finden Sie die allgemeine Lösung der Schrödingergleichung für $x < 0$ und $x > 0$ für ein Teilchen mit Energie $0 < E < V_0$. Bestimmen Sie dann die gesamte Wellenfunktion.
- Es sei das Potential $V(x) = \begin{cases} -V_0 & |x| < a/2 \\ 0 & |x| \geq a/2 \end{cases}$. Lösen Sie die Schrödingergleichung für ein Teilchen mit $-V_0 < E < 0$. Finden Sie dazu die Lösung für jedes Intervall mit konstantem Potential, und fügen Sie die Teillösungen dann zusammen. Verwenden Sie die Parität $x \rightarrow -x$ des Problems. Die Bedingung für die Energie E ist nicht mehr analytisch lösbar. Diskutieren Sie, wie das Lösen graphisch erfolgen kann.

2. Kohärente Zustände im harmonischen Oszillator

Wir betrachten einen harmonischen Oszillator in einer räumlichen Dimension.

$$\hat{H} = \hat{p}^2/2m + m\omega^2 \hat{x}^2/2 \quad (1)$$

- Wiederholen Sie die Herleitung aus der Vorlesung für die algebraische Lösung bis zur Darstellung der Energieeigenzuständen $\{|n\rangle\}$ aus den Leiteroperatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$. Fassen Sie die wichtigsten Punkte stichpunktartig zusammen.
- Bestimmen Sie die Unschärfe $\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle$ in Abhängigkeit des Zustands $|n\rangle$.
- Berechnen Sie die Unschärfe $\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle$ für einen Eigenzustand von $\hat{a}$, d.h. $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$. Hier ist α eine komplexe Zahl. Was fällt Ihnen dabei auf?
- Leiten Sie die Darstellung von $|\alpha\rangle$ in der Basis $\{|n\rangle\}$ her. Nutzen Sie $\mathbb{I} = \sum_n |n\rangle\langle n|$. Zeigen Sie, dass die Darstellung die zwei äquivalenten Formen besitzt, nämlich

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-|\alpha|^2/2 + \alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle. \quad (2)$$

- Zeigen Sie, dass $\langle x \rangle = \langle \alpha | \hat{x} | \alpha \rangle = \sqrt{2}x_0 \text{Re}(\alpha)$ und $\langle p \rangle = \langle \alpha | \hat{p} | \alpha \rangle = \sqrt{2}p_0 \text{Im}(\alpha)$ gilt und bestimmen Sie x_0 und p_0 .
- Untersuchen Sie, die zeitliche Entwicklung

$$|\alpha\rangle(t) = e^{-(i/\hbar)\hat{H}t} |\alpha\rangle \quad (3)$$

des Zustands $|\alpha\rangle$ und zeigen Sie, dass gilt $|\alpha\rangle(t) = e^{-it/2t_0}|\alpha(t)\rangle$ mit $\alpha(t) = e^{-it/t_0}\alpha$. Finden Sie t_0 .

- g) Zum krönenden Schluss bestimmen Sie welcher Differentialgleichung $\alpha(t)$ genügt. Schliessen Sie daraus auf die entsprechenden Differentialgleichungen für $\langle x(t) \rangle = \langle \alpha(t) | \hat{x} | \alpha(t) \rangle$ und $\langle p(t) \rangle = \langle \alpha(t) | \hat{p} | \alpha(t) \rangle$.

3. 2d Harmonischer Oszillator

Wir betrachten nun einen isotropen harmonischen Oszillator in zwei Dimensionen.

$$\hat{H} = (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2)/2m + m\omega^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2)/2 \quad (4)$$

- a) Berechnen Sie für die Operatoren $\hat{a}_x, \hat{a}_x^\dagger, \hat{a}_y$, und $\hat{a}_y^\dagger$ die Kommutator-Beziehungen.
b) Verfahren Sie analog zum eindimensionalen Fall und bringen Sie den Hamiltonoperator in die Form (geben Sie den Wert für die Grundzustandsenergie E_0 an)

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{N}_x + \hat{N}_y) + E_0. \quad (5)$$

Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenzustände (es ist natürlich die Dirac-Notation $|n_x, n_y\rangle$ zu nutzen). Berechnen Sie die Entartung für jede Eigenenergie.

- c) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls $\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$ die Form $-i\hbar(\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y - \hat{a}_y^\dagger\hat{a}_x)$ annimmt. Verifizieren Sie auch, dass $\hat{L}_z$ mit dem Hamilton-Operator kommutiert. Prüfen Sie dann, ob die Eigenzustände $|n_x, n_y\rangle$ von $\hat{H}$ auch Eigenzustände von $\hat{L}_z$ sind.
d) Führen Sie Operatoren $\hat{a}_\pm = (\hat{a}_x^\dagger \pm i\hat{a}_y^\dagger)/\sqrt{2}$ ein. Geben Sie die zugehörigen adjungierten Operatoren $\hat{a}_\pm$ an und berechnen Sie dafür die Kommutator-Beziehungen.
e) Definieren Sie die Quantenzahl-Operatoren $\hat{N}_\pm = \hat{a}_\pm^\dagger\hat{a}_\pm$ ein und drücken Sie den Hamilton *und* den Drehimpuls-Operator in diesen Grössen aus. Interpretieren Sie die physikalische Bedeutung von $\hat{N}_\pm$.
f) Finden Sie zum Schluss einen Satz an Zuständen die gleichzeitig Eigenzustände des Hamilton- und des Drehimpuls-Operators sind. Kann nun ein Zustand mit den beiden Observablen $(\hat{H}, \hat{L}_z)$ eindeutig definiert werden?