Moderne Theoretische Physik I SS 2021

Prof. Dr. Jörg Schmalian | **Blatt 6**
Vanessa Gall, Dr. Roland Willa | **Abgabe 04.06.2021**

---

1. 1d Potentialprobleme

Wir betrachten zeitunabhängige Probleme in einer räumlichen Dimension. Folgende Aufgaben wiederholen und ergänzen Aufgaben aus der Vorlesung:

a) Zeigen Sie, dass die Ableitung $\psi'(x)$ der Wellenfunktion an einer Potentialstufe stetig und an einem Delta-Potential unstetig ist. Integrieren Sie dazu die Schrödingergleichung über ein infinitesimales Intervall und nutzten aus, dass $\psi(x)$ stetig ist.

b) Es sei das Potential $V(x) = V_0\Theta(x)$ mit der Heaviside Funktion $\Theta(x)$. Finden Sie die allgemeine Lösung der Schrödingergleichung für $x<0$ und $x>0$ für ein Teilchen mit Energie $0<E<V_0$. Bestimmen Sie dann die gesamte Wellenfunktion.

c) Es sei das Potential $V(x) = \begin{cases} -V_0 & |x|<a/2 \\ 0 & |x|\geq a/2 \end{cases}$. Lösen Sie die Schrödingergleichung für ein Teilchen mit $-V_0 < E < 0$. Finden Sie dazu die Lösung für jedes Intervall mit konstantem Potential, und fügen Sie die Teillösungen dann zusammen. Verwenden Sie die Parität $x \to -x$ des Problems. Die Bedingung für die Energie E ist nicht mehr analytisch lösbar. Diskutieren Sie, wie das Lösen graphisch erfolgen kann.

Lösungsskizze:

a) Wir integrieren die Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x). \tag{1}$$

von $-\epsilon$ bis ϵ und finden

$$-(\hbar^2/2m)[\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon)] + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx[V(x) - E]\psi(x) = 0. \tag{2}$$

Mit einer Stufe $V_0\Theta(x)$ oder einer Delta-Funktion $(V_0 b)\delta(x)$ ist das Potential nur bei $x = 0$ singulär. Somit ergibt sich im ersten Fall (asymptotisch $\epsilon \to 0$)

$$-(\hbar^2/2m)[\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon)] + \epsilon E\psi(-\epsilon) + \epsilon(V_0 - E)\psi(\epsilon) = 0. \tag{3}$$

Im zweiten Fall gilt

$$-(\hbar^2/2m)[\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon)] + \epsilon(-E)\psi(-\epsilon) + \epsilon(-E)\psi(\epsilon) + V_0 b\psi(0) = 0. \tag{4}$$

Wir erkennen also, dass eine Potentialstufe für $\epsilon \to 0$ zu einer stetigen Ableitung der Wellenfunktion führt, d.h. $\psi'(0_+) = \psi'(0_-)$. Ein Delta-Potential hingegen führt zu einem Knick der Wellenfunktion, wobei sich die Ableitung um $\psi'(0_+) = \psi'(0_-) + 2mV_0 b\psi(0)/\hbar^2$ ändert. Ist $\psi(0) = 0$ spürt die Wellenfunktion das Potential nicht.

b) Für $x < 0$ ist die allgemeine Lösung der Schrödingergleichung

$$\psi_L(x) = Ae^{-ikx} + Be^{ikx}, \tag{5}$$

mit $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$. Für $x > 0$ lassen sich analog exponentielle Lösungen finden,

$$\psi_R(x) = Ce^{-\kappa x} + De^{\kappa x}, \tag{6}$$

mit $\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}$. Damit die Wellenfunktion bei $x \to +\infty$ nich divergiert muss $D = 0$ gelten. Die verbleibenden Parameter A, B und C werden verknüpft durch i) die Stetigkeit der Wellenfunktion bei $x = 0$, ii) die Stetigkeit der Ableitung ebenda. Der letzte Parameter ist durch die Normierung $\int dx\,|\psi(x)|^2$ bestimmt. Es gilt also

$$A + B = C, \tag{7}$$

$$-ik(A - B) = -\kappa C \tag{8}$$

Daraus folgt $B/A = -\frac{\kappa - ik}{\kappa + ik}$ und $C/A = 1 - \frac{\kappa - ik}{\kappa + ik}$. Die Teilchendichte zerfällt für $x > 0$ auf einer charakteristischen Eindringtiefe $x_0 = \kappa^{-1} \propto \sqrt{V_0 - E}$. Nur im Grenzfall $V_0 \to \infty$ findet man wieder $C = 0$ und $x_0 = 0$.

c) Hier ist für $|x| < a/2$ (Bereich II)

$$\psi_{II}(x) = Ae^{-ikx} + Be^{ikx}, \tag{9}$$

mit $k = \sqrt{2m(E + V_0)/\hbar^2}$ und für $|x| > a/2$ (Bereiche I und III)

$$\psi_{I/III}(x) = C_{I/III}e^{-\kappa x} + D_{I/III}e^{\kappa x}, \tag{10}$$

mit $\kappa = \sqrt{2m|E|/\hbar^2}$. Wie oben gilt sofort $C_I = D_{III} = 0$. An der Grenzschicht bei $-a/2$ liefert die Stetigkeitsbedingung

$$D_I e^{-\kappa a/2} = Ae^{ika/2} + Be^{-ika/2}, \tag{11}$$

$$\kappa D_I e^{-\kappa a/2} = -ikAe^{ika/2} + ikBe^{-ika/2}, \tag{12}$$

$$Ae^{-ika/2} + Be^{ika/2} = C_{III}e^{-\kappa a/2}, \tag{13}$$

$$-ikAe^{-ika/2} + ikBe^{ika/2} = -\kappa C_{III}e^{-\kappa a/2}. \tag{14}$$

Wegen der Parität (d.h. der Paritätsoperator vertauscht mit dem Hamilton-Operator) müssen die Eigenzustände des Hamiltonoperators in gerade und ungerade Lösungen zerfallen. Wir schreiben darum etweder $A = B$ und $D_I = C_{III}$ (gerade) oder $A = -B$ und $D_I = -C_{III}$ (ungerade). Damit gilt für gerade Eigenfunktionen

$$D_I e^{-\kappa a/2} = Ae^{ika/2} + Ae^{-ika/2}, \tag{15}$$

$$\kappa D_I e^{-\kappa a/2} = -ikAe^{ika/2} + ikAe^{-ika/2}, \tag{16}$$

und für ungerade gilt

$$D_I e^{-\kappa a/2} = Ae^{ika/2} - Ae^{-ika/2}, \tag{17}$$

$$\kappa D_I e^{-\kappa a/2} = -ikAe^{ika/2} - ikAe^{-ika/2}. \tag{18}$$

Es gilt dann offenbar $D_I = A(e^{ika/2} \pm e^{-ika/2})e^{\kappa a/2}$ und A ermittelt sich aus der Normierungsbedingung. Während Letztere ein eigenes (jedoch lösbares) Problem ist, muss zudem das Verhältnis der beiden Gleichungen erfüllt sein. Das ergibt im geraden/ungerade Fall eine Bedingung an die zulässigen Energien, nämlich

$$\kappa = k\tan(ka/2), \qquad / \quad \kappa = -k\cot(ka/2). \tag{19}$$

Es hängen sowohl k als auch κ von der Energie E ab. Wir führen $\xi = ka/2$ ein und sehen, dass sich die linke Seite (nach Multiplikation mit $a/2$) schreiben lässt als $z_1(\xi) = \sqrt{\xi_0^2 - \xi^2}$ mit $\xi_0^2 = (a^2/4)2m|V_0|/\hbar^2$. Damit befindet sich die linke Seite der Gleichung auf einem Kreis im ξz-Raum mit Radius V_0. Gleichzeitig wird dann die rechte Seite zu $z_{2,g}(\xi) = \xi\tan(\xi)$ [oder $z_{2,u}(\xi) = -\xi\cot(\xi)$]. Die Schnittpunkte geben die gebundenen Zustände. Es ist besonders hervorzuheben, dass auch für $V_0 \to 0$ immer eine symmetrische gebundene Lösung bei $E \approx -V_0\frac{2mV_0a^2}{4\hbar^2}$ existiert.

2. Kohärente Zustände im harmonischen Oszillator

Wir betrachten einen harmonischen Oszillator in einer räumlichen Dimension.

$$\hat{H} = \hat{p}^2/2m + m\omega^2\hat{x}^2/2 \tag{20}$$

a) Wiederholen Sie die Herleitung aus der Vorlesung für die algebraische Lösung bis zur Darstellung der Energieeigenzuständen $\{|n\rangle\}$ aus den Leiteroperatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$. Fassen Sie die wichtigsten Punkte stichpunktartig zusammen.

b) Bestimmen Sie die Unschärfe $\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle$ in Abhängigkeit des Zustands $|n\rangle$.

c) Berechnen Sie die Unschärfe $\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle$ für einen Eigenzustand von $\hat{a}$, d.h. $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$. Hier ist α eine komplexe Zahl. Was fällt Ihnen dabei auf?

d) Leiten Sie die Darstellung von $|\alpha\rangle$ in der Basis $\{|n\rangle\}$ her. Nutzen Sie $\mathbb{I} = \sum_n |n\rangle\langle n|$. Zeigen Sie, dass die Darstellung die zwei äquivalenten Formen besitzt, nämlich

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = e^{-|\alpha|^2/2+\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle. \tag{21}$$

e) Zeigen Sie, dass $\langle x\rangle = \langle\alpha|\hat{x}|\alpha\rangle = \sqrt{2}x_0\mathrm{Re}(\alpha)$ und $\langle p\rangle = \langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle = \sqrt{2}p_0\mathrm{Im}(\alpha)$ gilt und bestimmen Sie x_0 und p_0.

f) Untersuchen Sie, die zeitliche Entwicklung

$$|\alpha\rangle(t) = e^{-(i/\hbar)\hat{H}t}|\alpha\rangle \tag{22}$$

des Zustands $|\alpha\rangle$ und zeigen Sie, dass gilt $|\alpha\rangle(t) = e^{-it/2t_0}|\alpha(t)\rangle$ mit $\alpha(t) = e^{-it/t_0}\alpha$. Finden Sie t_0.

g) Zum krönenden Schluss bestimmen Sie welcher Differentialgleichung $\alpha(t)$ genügt. Schliessen Sie daraus auf die entsprechenden Differentialgleichungen für $\langle x(t)\rangle = \langle\alpha(t)|\hat{x}|\alpha(t)\rangle$ und $\langle p(t)\rangle = \langle\alpha(t)|\hat{p}|\alpha(t)\rangle$.

Lösungsskizze:

a) Siehe Vorlesungsskript. Wir benötigen im Folgenden, dass

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \tag{23}$$

wobei der Grundzustand $|0\rangle$ durch $\hat{a}|0\rangle = 0$ charakterisiert ist.

b) Es gilt

$$\langle n|\hat{x}|n\rangle = (x_0/\sqrt{2})\langle n|\hat{a}^\dagger + \hat{a}|n\rangle = 0 \tag{24}$$
$$\langle n|\hat{p}|n\rangle = i(p_0/\sqrt{2})\langle n|\hat{a}^\dagger - \hat{a}|n\rangle = 0 \tag{25}$$
$$\langle n|\hat{x}^2|n\rangle = (x_0^2/2)\langle n|(\hat{a}^\dagger + \hat{a})^2|n\rangle = (x_0^2/2)\langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle = (x_0^2/2)(2n+1) \tag{26}$$
$$\langle n|\hat{p}^2|n\rangle = -(p_0^2/2)\langle n|(\hat{a}^\dagger - \hat{a})^2|n\rangle = (p_0^2/2)\langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle = (p_0^2/2)(2n+1) \tag{27}$$

mit $x_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$ und $p_0 = \sqrt{\hbar m\omega}$. Daraus ergibt sich für den Eigenzustand $|n\rangle$ des Hamilton Operators eine Unschärfe

$$\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle = \frac{\hbar^2}{4}(2n+1)^2 \tag{28}$$

welche mit zunehmendem n anwächst.

c) Für einen Eigenzustand $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ des Absteigeoperators $\hat{a}$ gilt auch $\langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \langle\alpha|\alpha^*$. Die Unschärfe ermittelt sich dann aus

$$\langle\alpha|\hat{x}|\alpha\rangle = (x_0/\sqrt{2})\langle\alpha|\hat{a}^\dagger + \hat{a}|\alpha\rangle = (x_0/\sqrt{2})(\alpha^* + \alpha) \tag{29}$$
$$\langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle = i(p_0/\sqrt{2})\langle\alpha|\hat{a}^\dagger - \hat{a}|\alpha\rangle = i(p_0/\sqrt{2})(\alpha^* - \alpha) \tag{30}$$
$$\langle\alpha|\hat{x}^2|\alpha\rangle = (x_0^2/2)\langle\alpha|(\hat{a}^\dagger + \hat{a})^2|\alpha\rangle = (x_0^2/2)[(\alpha^* + \alpha)^2 + 1] \tag{31}$$
$$\langle\alpha|\hat{p}^2|\alpha\rangle = -(p_0^2/2)\langle\alpha|(\hat{a}^\dagger - \hat{a})^2|\alpha\rangle = (p_0^2/2)[1 - (\alpha^* - \alpha)^2] \tag{32}$$

nämlich

$$\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle = (\langle\hat{x}^2\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2)(\langle\hat{p}^2\rangle - \langle\hat{p}\rangle^2) = \hbar^2/4 \tag{33}$$

Alle Zustände $|\alpha\rangle$ besitzen damit eine minimale Unschärfe.

d) Wir schreiben

$$|\alpha\rangle = \sum\nolimits_n |n\rangle\langle n|\alpha\rangle = \sum\nolimits_n c_n|n\rangle \tag{34}$$

mit $c_n = \langle n|\alpha\rangle$. Aus $\langle n| = \langle 0|(\hat{a}^n/\sqrt{n!})$ folgt dann $c_n \propto \alpha^n/\sqrt{n!}$, genauer

$$|\alpha\rangle = \langle 0|\alpha\rangle \sum\nolimits_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \tag{35}$$

Den Wert von $\langle 0|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}$ ergibt sich aus der Normierungsbedingung

$$1 = \langle\alpha|\alpha\rangle = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \sum\nolimits_n \frac{\alpha^n(\alpha^*)^n}{n!} = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 e^{|\alpha|^2}. \tag{36}$$

Damit ist die erste gesuchte Form gezeigt. Wir nutzten die Darstellung der Zustände $|n\rangle$ aus dem Grundzustand und finden daraus die zweite Darstellung

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum\nolimits_n \frac{\alpha^n(\hat{a}^\dagger)^n}{n!}|0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle \tag{37}$$

Eine dritte (nicht gefragte) Darstellung $|\alpha\rangle = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}|0\rangle$ ergibt sich aus der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel (siehe Blatt 3).

e) Dies geht aus Teilaufgabe c) bereits hervor, wo auch x_0 und p_0 bereits definiert wurden.

f) Wir schreiben

$$
\begin{aligned}
|\alpha\rangle(t) &= e^{-(i\omega t)(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1/2)}|\alpha\rangle = e^{-(i\omega t)(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1/2)}e^{-|\alpha|^2/2}\sum\nolimits_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle && (38)\\
&= e^{-|\alpha|^2/2}\sum\nolimits_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}e^{-(i\omega t)(n+1/2)}|n\rangle = e^{-(i\omega t)/2}e^{-|\alpha|^2/2}\sum\nolimits_n \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle && (39)\\
&= e^{-(i\omega t)/2}|\alpha e^{-i\omega t}\rangle && (40)
\end{aligned}
$$

Es gilt also $\alpha(t) = \alpha e^{-it/t_0}$ mit $t_0 = \omega^{-1}$. Beachten Sie, dass $e^{-i\omega t/2}$ ein irrelevanter Phasenfaktor ist. Ein kohärenter Zustand bleibt über die zeitliche Entwicklung kohärent, d.h. er zerfliesst nicht.

g) Es gilt $\partial_t\alpha(t) = -i\omega\alpha(t)$. Aufgeteilt in Real- und Imaginärteil ergibt sich somit

$$
\begin{aligned}
\partial_t\mathrm{Re}[\alpha(t)] &= \omega\mathrm{Im}[\alpha(t)] && (41)\\
\partial_t\mathrm{Im}[\alpha(t)] &= -\omega\mathrm{Re}[\alpha(t)] && (42)
\end{aligned}
$$

oder auch

$$
\begin{aligned}
\partial_t\langle x(t)\rangle &= \langle p(t)\rangle/m && (43)\\
\partial_t\langle p(t)\rangle &= -m\omega^2\langle x(t)\rangle && (44)
\end{aligned}
$$

was den klassischen Bewegungsgleichungen vom harmonischen Oszillator entspricht.

3. 2d Harmonischer Oszillator

Wir betrachten nun einen isotropen harmonischen Oszillator in zwei Dimensionen.

$$\hat{H} = (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2)/2m + m\omega^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2)/2 \qquad (45)$$

a) Berechnen Sie für die Operatoren $\hat{a}_x$, $\hat{a}_x^\dagger$, $\hat{a}_y$, und $\hat{a}_y^\dagger$ die Kommutator-Beziehungen.

b) Verfahren Sie analog zum eindimensionalen Fall und bringen Sie den Hamilton-operator in die Form (geben Sie den Wert für die Grundzustandsenergie E_0 an)

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{N}_x + \hat{N}_y) + E_0. \qquad (46)$$

Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenzustände (es ist natürlich die Dirac-Notation $|n_x, n_y\rangle$ zu nutzen). Berechnen Sie die Entartung für jede Eigenenergie.

c) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls $\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$ die Form $-i\hbar(\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y - \hat{a}_y^\dagger\hat{a}_x)$ annimmt. Verifizieren Sie auch, dass $\hat{L}_z$ mit dem Hamilton-Operator kommutiert. Prüfen Sie dann, ob die Eigenzustände $|n_x, n_y\rangle$ von $\hat{H}$ auch Eigenzustände von $\hat{L}_z$ sind.

d) Führen Sie Operatoren $\hat{a}_\pm^\dagger = (\hat{a}_x^\dagger \pm i\hat{a}_y^\dagger)/\sqrt{2}$ ein. Geben Sie die zugehörigen adjungierten Operatoren $\hat{a}_\pm$ an und berechnen Sie dafür die Kommutator-Beziehungen.

e) Definieren Sie die Quantenzahl-Operatoren $\hat{N}_\pm = \hat{a}_\pm^\dagger\hat{a}_\pm$ ein und drücken Sie den Hamilton *und* den Drehimpuls-Operator in diesen Grössen aus. Interpretieren Sie die physikalische Bedeutung von $\hat{N}_\pm$.

f) Finden Sie zum Schluss einen Satz an Zuständen die gleichzeitig Eigenzustände des Hamilton- und des Drehimpuls-Operators sind. Kann nun ein Zustand mit den beiden Observablen $(\hat{H}, \hat{L}_z)$ eindeutig definiert werden?

Lösungsskizze:

a) Die Operatoren $\hat{a}_\eta$ und $\hat{a}_\eta^\dagger$ ($\eta \in \{x, y\}$) werden wie im 1D-Fall definiert durch

$$\hat{\eta} = \eta_0(\hat{a}_\eta^\dagger + \hat{a}_\eta)/\sqrt{2}, \qquad \hat{p}_\eta = ip_{\eta,0}(\hat{a}_\eta^\dagger - \hat{a}_\eta)/\sqrt{2} \tag{47}$$

also

$$\hat{a}_\eta^\dagger = (\sqrt{2}/2)(\hat{\eta}/\eta_0 + \hat{p}_\eta/p_{\eta,0}) \qquad \hat{a}_\eta = (\sqrt{2}/2)(\hat{\eta}/\eta_0 - \hat{p}_\eta/p_{\eta,0}) \tag{48}$$

wobei $\eta_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$ und $p_{\eta,0} = \sqrt{\hbar m\omega}$. Da $\hat{x}/\hat{p}_x$ mit $\hat{y}/\hat{p}_y$ kommutieren gilt

$$[\hat{a}_x^\dagger, \hat{a}_y] = [\hat{a}_x, \hat{a}_y] = [\hat{a}_x^\dagger, \hat{a}_y^\dagger] = [\hat{a}_x, \hat{a}_y^\dagger] = 0 \tag{49}$$

Die einzigen nicht-verschwindenden Kommutatoren sind $[\hat{a}_x, \hat{a}_x^\dagger] = [\hat{a}_y, \hat{a}_y^\dagger] = 1$.

b) Mit obigem Ergebnis zerfällt der harmonische Oszillator in zwei unabhängige Oszillatoren und der Hamiltonoperator wird zu

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y + 1) \tag{50}$$

mit Grundzustandsenergie $E_0 = 2(\hbar\omega/2)$. Der Grundzustand $|0,0\rangle$ ist definiert durch die Bedingung $\hat{a}_x|0,0\rangle = \hat{a}_y|0,0\rangle = 0$. In Anlehnung an die Herleitung aus der Vorlesung finden wir für die Ortsdarstellung

$$\psi_{0,0}(x,y) = \langle x,y|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi x_0 y_0}}e^{-(x^2/x_0^2+y/y_0^2)/2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi r_0^2}}e^{-r^2/2r_0^2} \tag{51}$$

mit $r = \sqrt{x^2+y^2}$ und $r_0 = x_0 = y_0$. Alle anderen Energie-Eigenzustände ermitteln sich danach rekursiv aus

$$|n_x+1, n_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_x+1}}\hat{a}_x^\dagger|n_x, n_y\rangle \tag{52}$$

$$|n_x, n_y+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_y+1}}\hat{a}_y^\dagger|n_x, n_y\rangle \tag{53}$$

oder direkt aus

$$|n_x, n_y\rangle = \frac{(\hat{a}_x^\dagger)^{n_x}}{\sqrt{n_x!}}\frac{(\hat{a}_y^\dagger)^{n_y}}{\sqrt{n_y!}}|0,0\rangle \tag{54}$$

Dieser Zustand besitzt eine Energie $E_{n_x,n_y} = \hbar\omega(n_x+n_y+1)$. Jede Eigenenergie $E_N = \hbar\omega(N+1)$ ist $(N+1)$-fach entartet mit $|n_x,n_y\rangle \in \{|0,N\rangle, |1,N-1\rangle, \ldots |N,0\rangle\}$.

c) Die gesuchte Identität wird durch einsetzten von Gl. (47) gezeigt:

$$\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = i(\hbar/2)[(\hat{a}_x^\dagger + \hat{a}_x)(\hat{a}_y^\dagger - \hat{a}_y) - (\hat{a}_y^\dagger + \hat{a}_y)(\hat{a}_x^\dagger - \hat{a}_x)] \tag{55}$$

$$= -i\hbar(\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y - \hat{a}_y^\dagger\hat{a}_x) \tag{56}$$

Auch das Kommutieren von $\hat{H}$ mit $\hat{L}_z$ lässt sich so zeigen. Insbesondere gilt

$$[\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y, \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x] = \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x \hat{a}_y - \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y = -\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y \tag{57}$$

$$[\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y, \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y] = \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y - \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y \hat{a}_y = \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y. \tag{58}$$

Es ist darauf hinzuweisen, dass $\hat{L}_z$ nicht mit den einzelnen Besetzungszahloperatoren $\hat{N}_\eta = \hat{a}_\eta^\dagger \hat{a}_\eta$ kommutiert sondern nur mit dessen Summe. Damit gilt

$$\hat{L}_z|n_x, n_y\rangle = -i\hbar\{[(n_x+1)n_y]^{1/2}|n_x+1, n_y-1\rangle - [n_x(n_y+1)]^{1/2}|n_x-1, n_y+1\rangle\}. \tag{59}$$

Der Zustand $\hat{L}_z|n_x, n_y\rangle$ ist verschieden von $\lambda|n_x, n_y\rangle$ und ist somit kein Eigenzustand von $\hat{L}_z$. Trotzdem ist $\hat{L}_z|n_x, n_y\rangle$ weiterhin ein Eigenzustand von $\hat{H}$.

d) Es sei $\hat{a}_\pm^\dagger = (\hat{a}_x^\dagger \pm i\hat{a}_y^\dagger)/\sqrt{2}$. Für die adjungierten Operatoren gilt

$$\hat{a}_\pm = (\hat{a}_x \mp i\hat{a}_y)/\sqrt{2}, \tag{60}$$

wobei der Vorzeichenwechsel in der Klammer von $i^* = -i$ herrührt. Es gilt

$$[\hat{a}_\pm, \hat{a}_\mp] = \{(\hat{a}_x \mp i\hat{a}_y)(\hat{a}_x \pm i\hat{a}_y) - (\hat{a}_x \pm i\hat{a}_y)(\hat{a}_x \mp i\hat{a}_y)\}/2 = 0 \tag{61}$$

$$[\hat{a}_\pm^\dagger, \hat{a}_\mp^\dagger] = \{(\hat{a}_x^\dagger \pm i\hat{a}_y^\dagger)(\hat{a}_x^\dagger \mp i\hat{a}_y^\dagger) - (\hat{a}_x^\dagger \mp i\hat{a}_y^\dagger)(\hat{a}_x^\dagger \pm i\hat{a}_y^\dagger)\}/2 = 0 \tag{62}$$

$$[\hat{a}_\pm, \hat{a}_\pm^\dagger] = \{(\hat{a}_x \mp i\hat{a}_y)(\hat{a}_x^\dagger \pm i\hat{a}_y^\dagger) - (\hat{a}_x^\dagger \pm i\hat{a}_y^\dagger)(\hat{a}_x \mp i\hat{a}_y)\}/2 \tag{63}$$

$$= \{\hat{a}_x\hat{a}_x^\dagger \pm i\hat{a}_x\hat{a}_y^\dagger \mp i\hat{a}_y\hat{a}_x^\dagger + \hat{a}_y\hat{a}_y^\dagger - (\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x \mp i\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y \pm i\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y)\}/2 \tag{64}$$

$$= 1 \tag{65}$$

$$[\hat{a}_\pm, \hat{a}_\mp^\dagger] = \{(\hat{a}_x \mp i\hat{a}_y)(\hat{a}_x^\dagger \mp i\hat{a}_y^\dagger) - (\hat{a}_x^\dagger \mp i\hat{a}_y^\dagger)(\hat{a}_x \mp i\hat{a}_y)\}/2 \tag{66}$$

$$= \{\hat{a}_x\hat{a}_x^\dagger \mp i\hat{a}_x\hat{a}_y^\dagger \mp i\hat{a}_y\hat{a}_x^\dagger - \hat{a}_y\hat{a}_y^\dagger - (\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x \mp i\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y \mp i\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_x - \hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y)\}/2 \tag{67}$$

$$= 0 \tag{68}$$

Damit verhalten sich $\hat{a}_\pm$ wie Ab- und $\hat{a}_\pm^\dagger$ wie Aufsteigeoperatoren.

e) Die Quantenzahloperatoren $\hat{N}_\pm$ nehmen die explizite Form

$$\hat{N}_\pm = (\hat{a}_x^\dagger \mp i\hat{a}_y^\dagger)(\hat{a}_x \pm i\hat{a}_y)/2 = (\hat{N}_x + \hat{N}_y)/2 \pm (\hat{L}_z/2), \tag{69}$$

an, wobei $\hat{N}_\eta = \hat{a}_\eta^\dagger \hat{a}_\eta$ ist. Daraus folgt sofort die Darstellung

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{N}_+ + \hat{N}_- + 1) \tag{70}$$

$$\hat{L}_z = \hbar(\hat{N}_+ - \hat{N}_-) \tag{71}$$

Die Operatoren $\hat{N}_\pm$ zählen die Anzahl rechtshändiger (+) und linkshändiger (-) Drehimpuls-Quanten.

f) Analog zur zweiten Teilaufgabe ist

$$|n_+, n_-\rangle = \frac{(\hat{a}_+^\dagger)^{n_+}}{\sqrt{n_+!}} \frac{(\hat{a}_-^\dagger)^{n_-}}{\sqrt{n_-!}}|0,0\rangle \tag{72}$$

wobei $\hat{a}_\pm|0,0\rangle = 0$ den Grundzustand definiert, und $\psi_{0,0}(x,y)$ wie in Gl. (51) ergibt. Jeder dieser Zustände ist gleichzeitig Eigenzustand von $\hat{H}$ und $\hat{L}_z$, d.h.

$$\hat{H}|n_+, n_-\rangle = \hbar\omega(n_+ + n_- + 1)|n_+, n_-\rangle \tag{73}$$

$$\hat{L}_z|n_+, n_-\rangle = \hbar(n_+ - n_-)|n_+, n_-\rangle \tag{74}$$

Für eine vorgegebene Energie $E_N = \hbar\omega(N+1)$ gilt $n_+ + n_- = N$. In diesem Unterraum gibt es $N+1$ verschiedene Eigenzustände die sich durch ihre Dreimpulsquantenzahl $M = n_+ - n_-$ unterscheiden $[(n_+, n_-) \in \{(0, N), (1, N-1), \ldots (N, 0)\}]$. Hierbei springt M immer um zwei, d.h. $M \in \{-N, -N+2, \ldots, N\}$ und spannt den gesamten entarteten Unterraum auf. Somit bildet das Tupel $(\hat{H}, \hat{L}_z)$ einen vollständigen Satz kommutierender Observablen [ähnlich wie $(\hat{H}, \hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{L}_z)$ für das Wasserstoffatom] und ordnet jedem Eigenzustand einen eindeutigen Satz an Quantenzahlen (n_+, n_-) [oder äquivalent (N, M)] zu.