Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik I SS 2021

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Vanessa Gall, Dr. Roland Willa

Blatt 8
Abgabe 18.06.2021

---

1. Stern-Gerlach experiment für Spin-1 Teilchen

Es sei ein Teilchen mit Spin $s = 1$

a) Nutzen Sie die Eigenbasis der Operatoren $\hat{\boldsymbol{S}}^2$ und $\hat{S}_z$ [die Basisvektoren werden mit $|1, s_z\rangle$ (oder kurz nur $|s_z\rangle$) bezeichnet] um eine *Matrixdarstellung* der Operatoren $\hat{\boldsymbol{S}}^2$, $\hat{S}_\pm$ und $\hat{S}_\mu$ ($\mu \in \{x, y, z\}$) zu finden. *Hinweis:* Die Eigenwerte eines Operators stehen in dessen Eigenbasis auf der Diagonalen.

b) Bestimmen Sie den Kommutator $[\hat{S}_x, \hat{S}_y]$ und kommentieren Sie das Ergebnis.

c) Finden Sie Ausdrücke für die Eigenzustände $|\psi_{s_x}\rangle$ ($s_x \in \{-1, 0, 1\}$) von $\hat{S}_x$ als Superposition von $\hat{S}_z$-Eigenzuständen. Arbeiten Sie dabei im Matrizenraum.

d) Welche Werte kann eine Messung der z-Komponente des Spins ($\hat{S}_z$) bei dem Zustand $|\psi_1\rangle$ hervorbringen? Geben Sie auch an mit welcher Wahrscheinlichkeit jedes Messergebnis gefunden wird.

e) Welche Werte kann ein sukzessives Messen von (zuerst) $\hat{S}_z$ und (dann) $\hat{S}_x$ bei dem Zustand $|\psi_1\rangle$ hervorbringen? Geben Sie auch hierfür die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten an. Unterscheiden Sie dabei ob Sie das Ergebnis der ersten Messung ($s_z = 1$) gesehen haben oder nicht.

2. Harmonischer Oszillator in 3 Dimensionen

Betrachten Sie ein Teilchen in einem dreidimensionalen harmonischen Potential $V(r) = \kappa r^2/2$. Lösen Sie das Problem vollständig (d.h. unter Angabe von allen Eigenzuständen und Eigenwerten). Bestimmen Sie zudem den Entartungsgrad jedes Energiezustandes.

3. Zweidimensionales Zentralpotential

In dieser Aufgabe betrachten wir zweidimensionale Probleme im Zentralpotential $V(\boldsymbol{r}) = V(\rho)$, wobei $\boldsymbol{r} = (x, y) = \rho(\cos\theta, \sin\theta)$. Der Hamiltonian ist also gegeben durch

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\rho). \tag{1}$$

In Polarkoordinaten ist der Laplace-Operator gegeben durch

$$\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \tag{2}$$

a) Drücken Sie die (aus der Ebene gerichtete) z Komponente des dreidimensionalen Drehimpulses L_z in Polarkoordinaten aus. Zeigen Sie, dass der Hamiltonian (1) geschrieben werden kann als

$$\mathcal{H} = \frac{-\hbar^2}{2m}\Big(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\Big) - \frac{1}{\rho^2\hbar^2}\hat{L}_z^2\Big) + V(\rho) \tag{3}$$

b) Zeigen Sie, dass die Lösung $\Psi(\rho,\theta)$ geschrieben werden kann als $\Psi(\rho,\theta) = R(\rho)F_m(\theta)$. Finden Sie die Bestimmungsgleichung für $F_m(\theta)$ und lösen Sie sie. Zeigen Sie, dass m eine ganze Zahl sein muss.

c) Das Potential besitze die Form

$$V(\rho) = \begin{cases} -V_0 & \rho < a \\ 0 & \rho > a \end{cases}. \tag{4}$$

Finden Sie die gebundenen Zustände mit $-V_0 < E < 0$. Zeigen Sie, dass der Radialanteil der Gleichung

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} - \frac{m^2}{\rho^2}R + q^2 R = 0, \tag{5}$$

genügt. Was ist q?

d) Zum Lösen des Radialanteils, führen Sie eine Koordinatentransform durch: Definieren Sie hierzu $R(\rho) = G(x)$ mit $x = q\rho$ und finden Sie die Differentialgleichung in Abgängigkeit von x und $G(x)$. Zeigen Sie, dass Sie eine Besselsche Differentialgleichung

$$x^2\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + x\frac{\partial G}{\partial x} + (x^2 - m^2)G = 0 \tag{6}$$

erhalten. Als Lösung dieser Differentialgleichung erhalten Sie

$$R(\rho) = \begin{cases} J_m(q\rho), & 0 < \rho < a \\ H_m^{(1)}(q\rho), & \rho > a \end{cases}. \tag{7}$$

Verwenden Sie die auf dem letzten Blatt eingeführte logarithmische Ableitung um eine formale Bedingung zur Bestimmung des Eigenenergien E_m zu erhalten.