Moderne Theoretische Physik I SS 2021

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Vanessa Gall, Dr. Roland WillaBlatt 9
Abgabe 25.06.2021

1. Kontinuierliche Symmetrien und ihre Erzeuger

In dieser Aufgabe betrachten wir kontinuierliche Symmetrien des (3D) Orts- oder (1D) Zeitraumes und wollen untersuchen, wie sich diese auf Wellenfunktionen auswirken.

- a) Die räumliche Translation $T_{\mathbf{a}}$ wirkt auf den Ort $\mathbf{r}$ wie $T_{\mathbf{a}}\mathbf{r} \equiv \mathbf{r} + \mathbf{a}$. Überzeugen Sie sich, dass gilt $T_{\mathbf{a}}^{-1} = T_{-\mathbf{a}}$. Finden Sie sodann den unitären Operator $\hat{U}_{\mathbf{a}}$ mit

$$\hat{U}_{\mathbf{a}}\psi(\mathbf{r}) = \psi(T_{\mathbf{a}}^{-1}\mathbf{r}) \equiv \psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{r}). \quad (1)$$

Beachten Sie, dass $\hat{U}_{\mathbf{a}}$ auf dem Hilbertraum der Wellenfunktionen wirkt, während $T_{\mathbf{a}}$ im Koordinatenraum 'lebt'. Führen Sie für eine Translation $\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}$ eine Entwicklung zu linearer Ordnung in $\delta\mathbf{a}$ durch. Die kontinuierliche Symmetrie erlaubt den Übergang $(\psi_{\mathbf{a}+\delta\mathbf{a}} - \psi_{\mathbf{a}})/\delta\mathbf{a} \xrightarrow{\delta\mathbf{a} \rightarrow 0} \nabla_{\mathbf{a}}\psi_{\mathbf{a}}$. Drücken Sie Ableitungen im Ortsraum durch den Impulsoperator $\hat{\mathbf{p}}$ aus. Lösen Sie die resultierende Differentialgleichung und lesen Sie daraus $\hat{U}_{\mathbf{a}}$ ab. Verwenden Sie die Anfangsbedingung $\psi_{\mathbf{a}=\mathbf{0}}(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r})$.

- b) Wiederholen Sie die obigen Schritte für zeitliche Translationen T_{ϵ} mit $T_{\epsilon}t = t + \epsilon$. Bestimmen Sie den unitären Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}_{\epsilon}$, mit

$$\hat{U}_{\epsilon}\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, T_{\epsilon}^{-1}t) \equiv \psi_{\epsilon}(\mathbf{r}, t). \quad (2)$$

Welcher Operator übernimmt hier die Rolle von $\hat{\mathbf{p}}$? Schauen Sie sich die zeitabhängige Schrödingergleichung an. Verwenden Sie die Anfangsbedingung $\psi_{\epsilon=0}(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, t)$.

- c) Betrachten Sie Rotationen $R_{\boldsymbol{\omega}}$ mit $R_{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r} \approx \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ (lineare Näherung in $|\boldsymbol{\omega}|$). Finden Sie $\hat{U}_{\boldsymbol{\omega}}$ aus

$$\hat{U}_{\boldsymbol{\omega}}\psi(\mathbf{r}) = \psi(R_{\boldsymbol{\omega}}^{-1}\mathbf{r}) \equiv \psi_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{r}). \quad (3)$$

Wiederholen Sie obige Schritte. Verwenden Sie $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ und führen Sie den Drehimpulsoperator $\hat{\mathbf{L}}$ ein. Die Anfangsbedingung sei $\psi_{\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}}(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r})$.

2. Freies geladenes Teilchen im elektischen Feld in einer Dimension

Betrachten Sie ein Teilchen mit Ladung q im konstanten elektrischen Feld $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_x$.

- a) Wie sieht die zugehörige Kraft aus? Finden Sie die zugehörige potentielle Energie $V(x)$ und geben Sie den Hamiltonian des Problems an.
- b) Zeigen Sie, dass mit dem Ansatz $\Psi(x) = \phi[\alpha(x + x_0)]$ und geeigneter Wahl von α und x_0 die stationäre (= zeitunabhängige) Schrödingergleichung die Form

$$(\partial_y^2 - y)\phi(y) = 0 \quad (4)$$

annimmt. Die Lösung dieser Gleichung ist die Airy-Funktion $\text{Ai}(x)$. Geben Sie (die unnormierte) Wellenfunktion $\Psi(x)$ explizit an.

3. Dichtematrix

Ein System befinde sich mit Wahrscheinlichkeit p_i in einem Zustand $|\psi_i\rangle$ (mit $\sum_i p_i = 1$). Der Erwartungswert bei einer Messung der Observable $\hat{A}$ ist dann $\langle \hat{A} \rangle = \sum_i p_i \langle \psi_i | \hat{A} | \psi_i \rangle$.

a) Zeigen Sie, dass gilt $\langle \hat{A} \rangle = \text{tr}(\hat{A}\hat{\rho})$, mit der *Dichtematrix*

$$\hat{\rho} \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (5)$$

und wo $\text{tr}(\hat{O}) = \sum_n \langle \eta_n | \hat{O} | \eta_n \rangle$ die Spur für eine beliebige Basis $\{\eta_n\}$ darstellt.

b) Drücken Sie die Dichtematrix der folgenden Zweizustandssysteme in der Basis $\{|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ aus: Ein System präpariert

i) im *reinen* Zustand $|1\rangle$

ii) im *kohärenten* Zustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$

iii) in einem *Zustandsgemisch* aus $|0\rangle$ und $|1\rangle$ mit $p_0 = p_1 = 1/2$

iv) in einem Zustandsgemisch $|+\rangle$ und $|-\rangle$ mit $p_{\pm} = 1/2$, wobei $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$

v) im kohärenten Zustand $|\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$

vi) im Zustand v). Amanda misst daraufhin den Zustand des Systems in der Basis $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ und teilt Ihnen das Ergebnis $|0\rangle$ mit.

vii) im Zustand v). Bertram misst daraufhin den Zustand des Systems in der Basis $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, teilt Ihnen aber das Ergebnis nicht mit.

viii) im Zustand v). Caroline misst daraufhin den Zustand System in der Basis $\{|\pm\rangle\}$, teilt Ihnen aber das Ergebnis nicht mit.

c) Berechnen Sie $\text{tr}(\hat{\rho})$, sowie $\hat{\rho}^2$ und $\text{tr}(\hat{\rho}^2)$. Was beobachten Sie?

d) Finden Sie heraus ob es Systeme in b) mit derselben Dichtematrix gibt. Welche Eigenschaft verbindet diese Systeme? Bestimmen Sie, in welchen Fällen die Dichtematrix diagonal in der Basis $\{|\pm\rangle\}$ ist.

e) Berechnen Sie $\langle \hat{A} \rangle$ für die Systeme in b) und der Observablen $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

f) **(Freiwillig)** Bestimmen Sie den Dichteoperator für ein kanonisches Ensemble, d.h. ein Zustandsgemisch, in dem jeder Zustand mit (Boltzmann)wahrscheinlichkeit $\langle \phi | e^{-\beta \hat{H}} | \phi \rangle$ auftritt ($\beta = 1/k_B T$). Achten Sie auf die Bedingung $\text{tr} \hat{\rho} = 1$.

Hinweis: Arbeiten Sie zuerst in der Eigenbasis des Hamilton-Operators $\hat{H}$. Finden Sie dann einen basisunabhängigen Ausdruck für $\hat{\rho}$.