Moderne Theoretische Physik I SS 2021

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Vanessa Gall, Dr. Roland WillaBlatt 10
Abgabe 02.07.2021

1. Stromdichte

Ohne Spin ist die Stromdichte eines geladenen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld gegeben durch

$$\mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m}[\psi^*(\nabla\psi) - (\nabla\psi^*)\psi] - \frac{e}{mc}\mathbf{A}|\psi|^2. \quad (1)$$

Gleichzeitig stellt $\rho = |\psi|^2$ die Teilchendichte dar.

- Zeigen Sie, dass damit die Kontinuitätsgleichung $\partial_t\rho + \nabla\mathbf{j} = 0$ erfüllt ist. Verwenden Sie hierzu die Schrödingergleichung $i\hbar\partial_t\psi = \{[-i\hbar\nabla - (e/c)\mathbf{A}]^2/2m + e\varphi\}\psi$ und ihre komplex Konjugierte um die Zeitableitungen auszudrücken.
- Beweisen Sie, dass die Stromdichte eichinvariant ist.

2. Zu Landau Niveaus

Es sei ein Teilchen in einem externen Magnetfeld $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$, mit dem Hamilton-Operator $\hat{H} = [\mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}]^2/2m$, wobei das Vektorpotential $\mathbf{A}$ an $\mathbf{B}$ geknüpft ist via $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

- Verifizieren Sie, dass $\mathbf{A} = -yB\mathbf{e}_x$ die obige Bedingung erfüllt und zeigen Sie, dass damit $\hat{x}_0 \equiv \hat{x} + c\hat{p}_y/eB$ und $\hat{y}_0 \equiv -c\hat{p}_x/eB$ mit dem Hamiltonoperator kommutieren.
- Bestimmen Sie ein Vektorpotential mit $A_x = A_z = 0$, welches ebensogut das Magnetfeld wiedergibt.
- Lösen sie das Landau Problem (analog zur Vorlesung) für die Eichung in b): Konkret, geben Sie die Wellenfunktionen der Landau Niveaus an und vergleichen Sie die Eigenenergien mit denjenigen aus der Vorlesung.
- Finden Sie eine Eichung in der das Vektorpotential offensichtlich die Rotations-symmetrie um die z -Achse respektiert.

3. Teilchen-Loch-Zustände (und Supraleitung)

In dieser Aufgabe betrachten wir eine spezielle Erweiterung der bereits bekannten Schrödingergleichung, bei der der Hamiltonoperator zusätzlich eine Matrixstruktur und die Wellenfunktionen somit eine Vektorstruktur besitzt. Dies tritt unter Anderem ein, wenn zusätzlich zu den Teilchen- auch Lochlösungen zulässig sind. Speziell betrachten wir das Problem

$$\begin{pmatrix} \hat{H} & \Delta \\ \Delta^* & -\hat{H} \end{pmatrix} \psi = E\psi \quad (2)$$

mit $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 - \mu$, $\Delta = \text{const.}$ und $\psi = [u(x), v(x)]^T$. Im Vektorraum von ψ stellt $(1, 0)^T$ den Teilchenkanal und $(0, 1)^T$ den Lochkanal dar. Der Parameter $\mu > 0$ ist

eine Konstante, die chemisches Potential genannt wird und die Einheiten einer Energie besitzt. Dieses Modell wird verwendet, um Heterostrukturen zu beschreiben, die sowohl aus normalen Metallen und Halbleitern als auch aus Supraleitern besteht.

- a) Betrachten Sie den metallischen Fall $\Delta = 0$ und bestimmen Sie die Lösungen (Eigenvektoren, Zustände und Energien) der stationären Schrödingergleichung. Nutzen Sie dazu einen Ebene-Wellen-Ansatz für u und v . Geben Sie explizit die Energie-Impuls-Beziehungen für alle (Eigen-)Lösungen an.
- b) Zeigen Sie, dass sich die Lösungen bei $E=0$ kreuzen, bestimmen Sie den zugehörigen (Fermi-)Wellenvektor k_F und skizzieren Sie die Energie-Impuls Beziehung.
- c) Betrachten Sie nun einen Supraleiter mit $\Delta > 0$ und reell. Finden Sie auch hier die Eigenenergien (als Herausforderung auch die Eigenzustände). Zeigen Sie dass Energie-Impuls-Beziehung die Form

$$E_{\pm}(k) = \pm \sqrt{[\hbar^2 k^2 / 2m - \mu]^2 + \Delta^2} \quad (3)$$

annimmt und skizzieren Sie diese. Diskutieren Sie was in der Nähe von k_F passiert.

- d) Ähnlich wie bei der Entartung von Zuständen in diskreten Spektren (z.B. Wasserstoffatom, harmonischer Oszillator) sind auch hier nicht alle Energien mit gleich vielen Zuständen versehen. Die Zustandsdichte wird definiert als

$$D(E, \Delta) = \sum_j \left| \frac{\partial k_j(E)}{\partial E} \right| \quad (4)$$

wobei die Summe über die Indizes aller Lösungen k_j zu einer Energie E läuft.

Berechnen Sie $D(E) \equiv D(E, 0)$ [aus a) und b)] und $D(E, \Delta)$ [aus c)] und vereinfachen Sie den letzteren Ausdruck für den Fall $\mu^2 \gg E^2 - \Delta^2$.