Moderne Theoretische Physik I SS 2021

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Vanessa Gall, Dr. Roland WillaBlatt 11
Abgabe 09.07.2021

Über das Format der diesjährigen Klausur wird eine anonyme Umfrage im ILIAS per Mehrheitsentscheid entscheiden. Bitte geben Sie Ihre Stimme bis zum 8. Juli 2021 12:00 ab. Das Ergebnis wird am 9. Juli bekannt gegeben.

1. Anwendung Heisenberg Bild I

Betrachten Sie die freie Schrödingergleichung mit dem Hamilton-Operator $\hat{H} = \hat{\mathbf{p}}^2/2m$.

- Wie lautet die Heisenbergsche Bewegungsgleichung des Impulsoperators $\hat{\mathbf{p}}_H$? Lösen Sie diese unter der Annahme, dass $\hat{\mathbf{p}}_H(t=0) = \hat{\mathbf{p}}_0$ bekannt ist.
- Wie lautet die Heisenbergsche Bewegungsgleichung des Ortsoperators $\hat{\mathbf{r}}_H$? Lösen Sie diese unter der Annahme, dass $\hat{\mathbf{r}}_H(t=0) = \hat{\mathbf{r}}_0$ und die Lösung der ersten Teilaufgabe bekannt ist.

2. Dekohärenz und Verschränkungsentropie

Ein reiner Quantenzustand (Qubit, *Quanten-Bit*) kann durch dissipative Kopplung an die Umgebung seine 'Reinheit' verlieren. Wie das passiert untersuchen wir im Folgenden.

- Bestimmen Sie die Dichtematrix für einen reinen Zustand $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ (mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$) und für ein Zustandsgemisch in dem die Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ mit jeweiligen Wahrscheinlichkeiten $|\alpha|^2$ und $|\beta|^2$ auftreten.
- Berechnen Sie $\text{tr}(\hat{\rho})$ und $\text{tr}(\hat{\rho}^2)$ für beide Fälle und diskutieren Sie wann das Zustandsgemisch $\text{tr}(\hat{\rho}^2) = 1$ besitzt.
- Wir beschreiben die Dekohärenz des Qubits durch einen diffusiven Prozess mit einem zeit-abhängigen Zustandsgemisch

$$\hat{\rho}(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\phi P(\phi, t) \hat{\rho}(\phi) \quad (1)$$

wobei $\hat{\rho}(\phi)$ die Dichtematrix des reinen Zustands $\alpha|0\rangle + \beta e^{i\phi}|1\rangle$ und $P(\phi, t) = (4\pi t/\tau)^{-1/2} \exp(-\phi^2 \tau/4t)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte für die Phase ϕ ist. Finden Sie explizite Ausdrücke für $\hat{\rho}(\phi)$ und $\hat{\rho}(t)$ und diskutieren Sie im letzteren Fall die beiden Grenzverhalten $t/\tau \rightarrow 0$ und $t/\tau \rightarrow \infty$. Interpretieren Sie τ .

- Intermezzo: Die Verschränkungsentropie S ist definiert als $S \equiv -k_B \text{tr}[\hat{\rho} \ln(\hat{\rho})]$ (der Logarithmus einer Matrix muss als Reihenentwicklung verstanden werden). Zeigen Sie, dass – mit λ_j den Eigenwerten von $\hat{\rho}$ – ebenso gilt

$$S = -k_B \sum_j \lambda_j \ln(\lambda_j). \quad (2)$$

Bestimmen Sie S für die beiden Fälle in a) mit $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = 1/2$.

- Berechnen Sie die Verschränkungsentropie $S(t)$ für $\hat{\rho}(t)$, diskutieren Sie wieder die Grenzfälle $t/\tau \rightarrow 0$ und $t/\tau \rightarrow \infty$ und vereinfachen Sie zum Schluss den Ausdruck für $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = 1/2$. *Hinweis:* Nutzen Sie, dass die Eigenwerte einer 2×2 Matrix $\rho = a\sigma_0 + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ genau $\lambda_{\pm} = a \pm b$ sind, wobei σ_0 die Einheitsmatrix, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ ein Vektor aus Paulimatrizien¹ und b die Norm von $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ ist.

¹Es gilt $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, und $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Teilchen-Loch-Zustände (und Supraleitung) II

In dieser Aufgabe betrachten wir erneut die Schrödingergleichung

$$\mathcal{H}\psi = \begin{pmatrix} \hat{H} & \Delta \\ \Delta^* & -\hat{H} \end{pmatrix} \psi = E\psi \quad (3)$$

mit $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 - \mu$, $0 < \Delta$ und $\psi = [u(x), v(x)]^T$, und eine Grenze zwischen einem Metall und einem Supraleiter. Die Lösungen im Metall besitzen die Form (s. Blatt 10)

$$\psi_t(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\pm ik_t x}, \quad \psi_\ell(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\pm ik_\ell x}, \quad (4)$$

$$k_t(E) = \sqrt{(2m/\hbar^2)(E + \mu)}, \quad k_\ell(E) = \pm \sqrt{(2m/\hbar^2)(-E + \mu)} \quad (5)$$

und in einem Supraleiter sind es

$$\psi_t(x) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{\pm iq_t x}, \quad \psi_\ell(x) = \begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} e^{\pm iq_\ell x}, \quad (6)$$

$$q_t(E) = \sqrt{(2m/\hbar^2)[\mu + (E^2 - \Delta^2)^{1/2}]}, \quad q_\ell(E) = \sqrt{(2m/\hbar^2)[\mu - (E^2 - \Delta^2)^{1/2}]}. \quad (7)$$

Hier sind u_0 und v_0 komplexe Konstanten. Zur Unterscheidbarkeit wird k für das Metall und q für den Supraleiter verwendet. Die Dispersionsrelation ist gegeben durch

$$E_{\text{Metall}} = \sqrt{[\hbar^2 k^2 / 2m - \mu]^2}, \quad E_{\text{Supral.}} = \sqrt{[\hbar^2 q^2 / 2m - \mu]^2 + \Delta^2}, \quad (8)$$

wobei wir $E \geq 0$ betrachten. Es sei zudem $\Delta \ll \mu$.

- Zeigen Sie, dass der Strom $j = \frac{i\hbar}{2m} [(\partial_x u^*)u - u^* \partial_x u - ((\partial_x v^*)v - v^* \partial_x v)]$ die Kontinuitätsgleichung $\partial_t \rho + \partial_x j = 0$ erfüllt, wobei $\rho = \psi^\dagger \psi$.
- Normieren Sie Zustände in der Aufgabenstellung so, dass $|j| = 1$ gilt.
- Die Geschwindigkeit eines *Teilchens* mit Dispersionrelation $E(k)$ ist gegeben durch $v(k) = \frac{1}{\hbar} \partial_k E(k)$. Teilchen mit $v(k) > 0$ bewegen sich nach rechts, solche mit $v(k) < 0$ nach links. Verwenden Sie die oben angegebenen Dispersionsrelationen um zu zeigen, dass sowohl im normalen Metall als auch im Supraleiter für *Teilchen* Wellenvektor und Geschwindigkeit das gleiche Vorzeichen haben, während es für *Löcher* genau umgekehrt ist. Betrachten Sie den Fall $E > \Delta$. Was passiert bei $E < \Delta$?
- Nun betrachten wir das erwähnte Streuproblem: bei $x < 0$ haben wir ein normales Metall, bei $x > 0$ einen Supraleiter. Wir beschränken uns auf den Fall $E = 0$, in welchem alle Wellenvektoren gerade der Fermiwellenvektor k_F sind. Betrachten Sie hierzu den Fall, dass ein im normalen Metall nach rechts einlaufendes Teilchen sowohl als Teilchen r_{tt} als auch als Loch $r_{t\ell}$ reflektiert werden kann (dann also nach links läuft) und sowohl als Teilchen t_{tt} als auch als Loch $t_{t\ell}$ transmittiert werden kann (also weiter nach rechts läuft). Wir verwenden den Ansatz

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{m}{\hbar k_F}} \times \begin{cases} 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{+ik_F x} + r_{tt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_F x} + r_{t\ell} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+ik_F x}, & x < 0 \\ t_{tt} \frac{1}{\sqrt{|u_0|^2 - |v_0|^2}} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{+ik_F x} + t_{t\ell} \frac{1}{\sqrt{|u_0|^2 - |v_0|^2}} \begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} e^{-ik_F x}, & x > 0 \end{cases}, \quad (9)$$

mit den auf $|j| = 1$ normierten Wellenfunktionen. Begründen Sie mit dem Vorzeichen der vorher berechneten Geschwindigkeit, weshalb wir nur 5 der möglichen 8 allgemeinen Lösungen verwenden sollten. Bestimmen Sie die Koeffizienten $t_{tt}, t_{t\ell}, r_{tt}, r_{t\ell}$ diese durch Verwendung der Stetigkeitsbedingung der Wellenfunktion und ihrer Ableitung bei $x = 0$. Können Sie erklären, weshalb $r_{tt} = 0$ ist?