Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik I SS 2021

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Vanessa Gall, Dr. Roland Willa

Blatt 11
Abgabe 09.07.2021

Über das Format der diesjährigen Klausur wird eine anonyme Umfrage im ILIAS per Mehrheitsentscheid entscheiden. Bitte geben Sie Ihre Stimme bis zum 8. Juli 2021 12:00 ab. Das Ergebnis wird am 9. Juli bekannt gegeben.

1. Anwendung Heisenberg Bild I

Betrachten Sie die freie Schrödingergleichung mit dem Hamilton-Operator $\hat{H} = \hat{\boldsymbol{p}}^2/2m$.

a) Wie lautet die Heisenbergsche Bewegunsgleichung des Impulsoperators $\hat{\boldsymbol{p}}_H$? Lösen Sie diese unter der Annahme, dass $\hat{\boldsymbol{p}}_H(t=0) = \hat{\boldsymbol{p}}_0$ bekannt ist.

b) Wie lautet die Heisenbergsche Bewegunsgleichung des Ortsoperators $\hat{\boldsymbol{r}}_H$? Lösen Sie diese unter der Annahme, dass $\hat{\boldsymbol{r}}_H(t=0) = \hat{\boldsymbol{r}}_0$ und die Lösung der ersten Teilaufgabe bekannt ist.

Lösungsskizze:

a) Für freie Teilchen kommutiert der Impuls mit dem Hamiltonian, wir erhalten also

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{p}}_H(t)}{dt} = 0 \tag{1}$$

was gelöst wird durch

$$\hat{\boldsymbol{p}}_H(t) = \hat{\boldsymbol{p}}(0). \tag{2}$$

b) Für den Ortsoperator gilt

$$i\hbar\frac{d\hat{\boldsymbol{r}}_H(t)}{dt} = \frac{1}{2m}[\hat{\boldsymbol{r}}_H(t), \hat{\boldsymbol{p}}_H^2] = i\hbar\frac{\hat{\boldsymbol{p}}_H}{m} \tag{3}$$

oder umgeschrieben

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{r}}_H(t)}{dt} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}_H}{m}. \tag{4}$$

Diese Differentialgleichung wird gelöst durch

$$\hat{\boldsymbol{r}}_H(t) = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}(0)}{m}t + \hat{\boldsymbol{r}}(0). \tag{5}$$

2. Dekohärenz und Verschränkungsentropie

Ein reiner Quantenzustand (Qubit, *Quanten-Bit*) kann durch dissipative Kopplung an die Umgebung seine 'Reinheit' verlieren. Wie das passiert untersuchen wir im Folgenden.

a) Bestimmen Sie die Dichtematrix für einen reinen Zustand $\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$ (mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $|\alpha|^2 + |\beta| = 1$) und für ein Zustandsgemisch in dem die Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ mit jeweiligen Wahrscheinlichkeiten $|\alpha|^2$ und $|\beta|^2$ auftreten.

b) Berechnen Sie $\mathrm{tr}(\hat{\rho})$ und $\mathrm{tr}(\hat{\rho}^2)$ für beide Fälle und diskutieren Sie wann das Zustandsgemisch $\mathrm{tr}(\hat{\rho}^2) = 1$ besitzt.

c) Wir beschreiben die Dekohärenz des Qubits durch einen diffusiven Prozess mit einem zeit-abhängigen Zustandsgemisch

$$\hat{\rho}(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\phi P(\phi, t)\hat{\rho}(\phi) \tag{6}$$

wobei $\hat{\rho}(\phi)$ die Dichtematrix des reinen Zustands $\alpha|0\rangle + \beta e^{i\phi}|1\rangle$ und $P(\phi,t) = (4\pi t/\tau)^{-1/2}\exp(-\phi^2\tau/4t)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte für die Phase ϕ ist. Finden Sie explizite Ausdrücke für $\hat{\rho}(\phi)$ und $\hat{\rho}(t)$ und diskutieren Sie im letzteren Fall die beiden Grenzverhalten $t/\tau \to 0$ und $t/\tau \to \infty$. Interpretieren Sie τ.

d) Intermezzo: Die Verschränkungsentropie S ist definiert als $S \equiv -k_B \mathrm{tr}[\hat{\rho}\ln(\hat{\rho})]$ (der Logarithmus einer Matrix muss als Reihenentwicklung verstanden werden). Zeigen Sie, dass – mit λ_j den Eigenwerten von $\hat{\rho}$ – ebenso gilt

$$S = -k_B \sum_j \lambda_j \ln(\lambda_j). \tag{7}$$

Bestimmen Sie S für die beiden Fälle in a) mit $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = 1/2$.

e) Berechnen Sie die Verschränkungsentropie $S(t)$ für $\hat{\rho}(t)$, diskutieren Sie wieder die Grenzfälle $t/\tau \to 0$ und $t/\tau \to \infty$ und vereinfachen Sie zum Schluss den Ausdruck für $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = 1/2$. *Hinweis:* Nutzen Sie, dass die Eigenwerte einer 2×2 Matrix $\rho = a\sigma_0 + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ genau $\lambda_\pm = a \pm b$ sind, wobei σ_0 die Einheitsmatrix, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ ein Vektor aus Paulimatrizen[1] und b die Norm von $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ ist.

Lösungsskizze:

a) Die Dichtematrix wurde in der letzten Übung und in der Vorlesung eingeführt. Durch Einsetzen [wir arbeiten in der natürlichen Basis $\{|0\rangle = (1,0), |1\rangle = (0,1)\}$] ergibt sich

$$\hat{\rho}_{\text{rein}} = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\alpha^*\langle 0| + \beta^*\langle 1|) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\hat{\rho}_{\text{gem.}} = |\alpha|^2|0\rangle\langle 0| + |\beta|^2|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

b) Beide Dichtematrizen besitzten dieselbe Spur $\mathrm{tr}(\hat{\rho}) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ wie es sich gehört. Wir finden nach einigem Rechnen

$$\mathrm{tr}(\hat{\rho}^2_{\text{rein}}) = \mathrm{tr}(\hat{\rho}_{\text{rein}}) = 1 \tag{10}$$

$$\mathrm{tr}(\hat{\rho}^2_{\text{gem.}}) = |\alpha|^4 + |\beta|^4 \leq 1 \tag{11}$$

Der letzte Ausdruck wird nur eins, wenn $|\alpha| = 1$ und $\beta = 0$ (oder $\alpha = 0$ und $|\beta| = 1$), d.h. wenn es sich um einen reinen Zustand $|0\rangle$ (oder $|1\rangle$) handelt.

c) Die Dichtematrix aus a) lässt sich für jedes beliebige ϕ verallgemeinern zu

$$\hat{\rho}(\phi) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* e^{-i\phi} \\ \alpha^*\beta e^{i\phi} & |\beta|^2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

[1] Es gilt $\sigma_0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\sigma_x = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\sigma_y = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)$, und $\sigma_z = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Nun kann Gl. (6) komponentenweise berechnet werden. Die Diagonalelemente ergeben trivial $|\alpha|^2$ respektive $|\beta|^2$ da es sich bei $P(\phi, t)$ um eine normierte Gauss'sche Verteilung handelt. Wir finden ausserdem (nach quadratischer Ergänzung)

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\phi P(\phi, t) e^{\pm i\phi} = e^{-t/\tau}. \tag{13}$$

Also ist

$$\hat{\rho}(t) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* e^{-t/\tau} \\ \alpha^*\beta e^{-t/\tau} & |\beta|^2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Die ausserdiagonalen Einträge der Matrix werden mit zunehmender Zeit ausgeschmiert und zerfallen exponentiell über eine Zeitskala τ. Diese wird auch Dekohärenzzeit genannt. Zur Zeit $t = 0$ beschreibt die Dichtematrix ein Qubit in dem reinen Zustand aus a) da die Phasenverschmierung $P(\phi, 0)$ genau einer Deltafunktion entspricht und keine Unschärfe zulässt. Nach langer Zeit $t \gg \tau$ sind die ausserdiagonalen Elemente zerfallen und das Qubit ist ein Gemisch von zwei inkohärenten Zuständen.

d) Intermezzo: Die Dichtematrix ist selbstadjungiert, so dass eine unitäre Matrix M existiert mit $M^{-1}\hat{\rho}M = \Lambda$ und $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_N)$ einer Diagonalmatrix reeller Eigenwerte. In dieser Basis ist der Matrix-Logarithmus trivial durchzuführen, da

$$\ln(\hat{\rho}) = \ln[\mathbb{I} + (\hat{\rho} - \mathbb{I})] = \sum_k (-1)^{k+1} \frac{(\hat{\rho} - \mathbb{I})^k}{k} \tag{15}$$

$$= M\Big[\sum_k (-1)^{k+1} \frac{[M^{-1}(\hat{\rho} - \mathbb{I})M]^k}{k}\Big] M^{-1} = M\Big[\sum_k (-1)^{k+1} \frac{(\Lambda - \mathbb{I})^k}{k}\Big] M^{-1} \tag{16}$$

$$= M \ln(\Lambda) M^{-1} \tag{17}$$

wobei $\ln(\Lambda) = \mathrm{diag}[\ln(\lambda_1), ..., \ln(\lambda_N)]$. Somit ist auch

$$S = -k_B \mathrm{tr}[\hat{\rho}\ln(\hat{\rho})] = -k_B \mathrm{tr}[M\Lambda\ln(\Lambda)M^{-1}] = -k_B \mathrm{tr}[\Lambda \ln(\Lambda)] \tag{18}$$

was unser Intermezzo beweist.

e) Für $\hat{\rho}(t)$ gilt $\hat{\rho}(t) = a\sigma_0 + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ mit $a = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1/2$ und

$$\boldsymbol{b} = \Big[(\alpha\beta^* + \alpha^*\beta)e^{-t/\tau},\ (\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)e^{-t/\tau},\ |\alpha|^2 - |\beta|^2\Big]/2 \tag{19}$$

und damit $b = |\boldsymbol{b}| = (1/2)\sqrt{(|\alpha|^2 - |\beta|^2)^2 + 4|\alpha|^2|\beta|^2 e^{-2t/\tau}}$. Es gilt dann

$$S(t) = -k_B[(a + b)\ln(a + b) + (a - b)\ln(a - b)] \tag{20}$$

$$= -\frac{k_B}{2}\Big\{\Big(1+\sqrt{(|\alpha|^2-|\beta|^2)^2 + 4|\alpha|^2|\beta|^2 e^{-2t/\tau}}\Big)\ln\Big(1+\sqrt{(|\alpha|^2-|\beta|^2)^2 + 4|\alpha|^2|\beta|^2 e^{-2t/\tau}}\Big)$$
$$+\Big(1-\sqrt{(|\alpha|^2-|\beta|^2)^2 + 4|\alpha|^2|\beta|^2 e^{-2t/\tau}}\Big)\ln\Big(1-\sqrt{(|\alpha|^2-|\beta|^2)^2 + 4|\alpha|^2|\beta|^2 e^{-2t/\tau}}\Big)$$
$$- 2\ln(2)\Big\} \tag{21}$$

Im Grenzfall $t = 0$ ist $S(0) = 0$. Das Verschwinden der Entropie bedeutet, dass der Zustand zur Startzeit präzise bekannt ist. Bei kleinen Zeiten gilt $S(t \ll \tau) \approx 2k_B|\alpha|^2|\beta|^2(t/\tau)\{1-\ln[2|\alpha|^2|\beta|^2(t/\tau)]\} \sim -t\ln(t)$. Bei grossen Zeiten gilt hingegen (mit $z = |\alpha|^2-|\beta|^2$ und $\eta = |\alpha||\beta|$)

$$S(\infty) = -\frac{k_B}{2}\Big\{(1+z)\ln(1+z)+(1-z)\ln(1-z)-2\ln(2)\Big\} \tag{22}$$
$$= -\frac{k_B}{2}\Big\{\ln(1-z^2)+z\ln\Big[\frac{1+z}{1-z}\Big]-2\ln(2)\Big\} \tag{23}$$
$$= k_B\Big\{\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(1-z^2) - z\,\mathrm{artanh}(z)\Big\} \tag{24}$$
$$S(t \gg \tau) = S(\infty) - k_B\frac{\eta^2}{z}\ln\Big[\frac{1+z}{1-z}\Big]e^{-2t/\tau} \tag{25}$$

Die Entropie wächst monoton an und nähert sich ihrem Maximalwert $S(\infty)$ exponentiell an. Dieses Maximum beschreibt auch den vollständigen Verlust an Verschränkung da wir dann keine Information mehr über den Zustand besitzten (sondern nur noch über die Wahrscheinlichkeiten eines Gemisches). Schliesslich vereinfachen sich die Ausdrücke für $\alpha = \beta = 1/2$ zu ($z = 0$, $\eta = 1/2$)

$$S(t) = -\frac{k_B}{2}\Big\{\big(1+e^{-t/\tau}\big)\ln\big(1+e^{-t/\tau}\big) + \big(1-e^{-t/\tau}\big)\ln\big(1-e^{-t/\tau}\big) - 2\ln(2)\Big\} \tag{26}$$
$$= k_B\Big\{\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(1-e^{-2t/\tau}) - e^{-t/\tau}\,\mathrm{artanh}(e^{-t/\tau})\Big\} \tag{27}$$

Mit den Grenzwerten $S(0) = 0$, $S(\infty) = k_B\ln(2)$, und den asymptotischen Verhalten bei kleinen Zeiten $S(t \ll \tau) \approx -k_B(t/2\tau)[\ln(t/2\tau) - 1]$ und bei grossen Zeiten $S(t \gg \tau) \approx k_B[\ln(2) - e^{-2t/\tau}/2]$

3. Teilchen-Loch-Zustände (und Supraleitung) II

In dieser Aufgabe betrachten wir erneut die Schrödingergleichung

$$\mathcal{H}\psi = \begin{pmatrix} \hat{H} & \Delta \\ \Delta^* & -\hat{H} \end{pmatrix}\psi = E\psi \tag{28}$$

mit $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 - \mu$, $0 < \Delta$ und $\psi = [u(x), v(x)]^T$, und eine Grenze zwischen einem Metall und einem Supraleiter. Die Lösungen im Metall besitzen die Form (s. Blatt 10)

$$\psi_t(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\pm ik_t x}, \qquad \psi_\ell(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\pm ik_l x}, \tag{29}$$
$$k_t(E) = \sqrt{(2m/\hbar^2)(E+\mu)}, \qquad k_\ell(E) = \pm\sqrt{(2m/\hbar^2)(-E+\mu)} \tag{30}$$

und in einem Supraleiter sind es

$$\psi_t(x) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{\pm iq_t x}, \qquad \psi_\ell(x) = \begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} e^{\pm iq_\ell x}, \tag{31}$$
$$q_t(E) = \sqrt{(2m/\hbar^2)[\mu + (E^2-\Delta^2)^{1/2}]}, \quad q_\ell(E) = \sqrt{(2m/\hbar^2)[\mu - (E^2-\Delta^2)^{1/2}]}. \tag{32}$$

Hier sind u_0 und v_0 komplexe Konstanten. Zur Unterscheidbarkeit wird k für das Metall und q für den Supraleiter verwendet. Die Dispersionsrelation ist gegeben durch

$$E_{\mathrm{Metall}} = \sqrt{\big[\hbar^2k^2/2m - \mu\big]^2} \qquad E_{\mathrm{Supral.}} = \sqrt{\big[\hbar^2q^2/2m - \mu\big]^2 + \Delta^2}, \tag{33}$$

wobei wir $E \geq 0$ betrachten. Es sei zudem $\Delta \ll \mu$.

a) Zeigen Sie, dass der Strom $j = \frac{i\hbar}{2m}[((\partial_x u^*)u - u^*\partial_x u) - ((\partial_x v^*)v - v^*\partial_x v)]$ die Kontinuitätsgleichung $\partial_t\rho + \partial_x j = 0$ erfüllt, wobei $\rho = \psi^\dagger\psi$.

b) Normieren Sie Zustände in der Aufgabenstellung so, dass $|j|=1$ gilt.

c) Die Geschwindigkeit eines *Teilchens* mit Dispersionrelation $E(k)$ ist gegeben durch $v(k)=\frac{1}{\hbar}\partial_k E(k)$. Teilchen mit $v(k)>0$ bewegen sich nach rechts, solche mit $v(k)<0$ nach links. Verwenden Sie die oben angegebenen Dispersionsrelationen um zu zeigen, dass sowohl im normalen Metall als auch im Supraleiter für *Teilchen* Wellenvektor und Geschwindigkeit das gleiche Vorzeichen haben, während es für *Löcher* genau umgekehrt ist. Betrachten Sie den Fall $E > \Delta$. Was passiert bei $E < \Delta$?

d) Nun betrachten wir das erwähnte Streuproblem: bei $x < 0$ haben wir ein normales Metall, bei $x > 0$ einen Supraleiter. Wir beschränken uns auf den Fall $E = 0$, in welchem alle Wellenvektoren gerade der Fermiwellenvektor k_F sind. Betrachten Sie hierzu den Fall, dass ein im normalen Metall nach rechts einlaufendes Teilchen sowohl als Teilchen r_{tt} als auch als Loch $r_{t\ell}$ reflektiert werden kann (dann also nach links läuft) und sowohl als Teilchen t_{tt} als auch als Loch $t_{t\ell}$ transmittiert werden kann (also weiter nach rechts läuft). Wir verwenden den Ansatz

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{m}{\hbar k_F}} \times \begin{cases} 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{+ik_Fx} + r_{tt}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-ik_Fx} + r_{t\ell}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{+ik_Fx}, & x<0 \\ t_{tt}\frac{1}{\sqrt{|u_0|^2-|v_0|^2}}\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix}e^{+ik_Fx} + t_{t\ell}\frac{1}{\sqrt{|u_0|^2-|v_0|^2}}\begin{pmatrix}v_0\\u_0\end{pmatrix}e^{-ik_Fx}, & x>0 \end{cases}, \tag{34}$$

mit den auf $|j| = 1$ normierten Wellenfunktionen. Begründen Sie mit dem Vorzeichen der vorher berechneten Geschwindigkeit, weshalb wir nur 5 der möglichen 8 allgemeinen Lösungen verwenden sollten. Bestimmen Sie die Koeffizienten $t_{tt}, t_{t\ell}, r_{tt}, r_{t\ell}$ diese durch Verwendung der Stetigkeitsbedingung der Wellenfunktion und ihrer Ableitung bei $x = 0$. Können Sie erklären, weshalb $r_{tt} = 0$ ist?

Lösungsskizze:

a) Zunächst überzeugt man sich, dass

$$\partial_x j = \frac{i\hbar}{2m}[((\partial_x^2 u^*)u - u^*\partial_x^2 u) - ((\partial_x^2 v^*)v - v^*\partial_x^2 v)]. \tag{35}$$

Dann verwenden wir die zeitabhängige Schrödingegrleichung $i\hbar\partial_t\psi = \mathcal{H}\psi$ und $-i\hbar\partial_t\psi^\dagger = (\mathcal{H}\psi)^\dagger$ und erhalten damit

$$\begin{aligned} \partial_t\psi^\dagger\psi &= (\partial_t\psi^\dagger)\psi + \psi^\dagger\partial_t\psi & (36)\\ &= \frac{i}{\hbar}((\hat{H}u^*)u - u^*\hat{H}u - (\hat{H}v^*)v + v^*\hat{H}v) & (37)\\ &= -\frac{i\hbar}{2m}[((\partial_x^2 u^*)u - u^*\partial_x^2 u) - ((\partial_x^2 v^*)v - v^*\partial_x^2 v)] & (38) \end{aligned}$$

und die Kontinuitätsgleichung ist erfüllt. Die Bedeutung des Minuszeichens zwischen den beiden Beiträgen liegt in der Tatsache begründet, dass Teilchen und Löcher genau entgegengestzte Ladung besitzen.

b) Wir finden die korrekt normierten Zustände im normalen Metall

$$\psi_t(x) = \sqrt{\frac{m}{\hbar k_t}} \binom{1}{0} e^{\pm i k_t x}, \quad \psi_\ell(x) = \sqrt{\frac{m}{\hbar k_\ell}} \binom{0}{1} e^{\pm i k_l x} \tag{39}$$

und im Supraleiter

$$\psi_t(x) = \sqrt{\frac{m}{\hbar q_t}} \frac{1}{\sqrt{|u_0|^2 - |v_0|^2}} \binom{u_0}{v_0} e^{\pm i q_t x}, \quad \psi_\ell(x) = \sqrt{\frac{m}{\hbar q_\ell}} \frac{1}{\sqrt{|u_0|^2 - |v_0|^2}} \binom{u_0}{v_0} e^{\pm i q_\ell x} \tag{40}$$

c) Im normalen Metall erhalten wir

$$v(k) = \frac{1}{\hbar} \partial_k \sqrt{\left[\hbar^2 k^2/2m - \mu\right]^2} = \frac{\hbar k}{m} \frac{\left[\hbar^2 k^2/2m - \mu\right]}{\sqrt{\left[\hbar^2 k^2/2m - \mu\right]^2}} \tag{41}$$

Für Teilchen ist $\hbar^2 k^2/2m - \mu = E > 0$, somit ist v parallel zu k, für Löcher ist $\hbar^2 k^2/2m - \mu = -E < 0$, somit ist v antiparallel zu k
Analog sieht man im Supraleiter

$$v(k) = \frac{1}{\hbar} \partial_k \sqrt{\left[\hbar^2 k^2/2m - \mu\right]^2 + \Delta^2} = \frac{\hbar k}{m} \frac{\left[\hbar^2 k^2/2m - \mu\right]}{\sqrt{\left[\hbar^2 k^2/2m - \mu\right]^2 + \Delta^2}} \tag{42}$$

für Teilchen ist $\hbar^2 k^2/2m - \mu = +\sqrt{E^2 - \Delta^2} > 0$, somit ist v parallel zu k, für Löcher ist $\hbar^2 k^2/2m - \mu = -\sqrt{E^2 - \Delta^2} < 0$, somit ist v antiparallel zu k. Für den Fall $\Delta > E$ erhält man evaneszente Wellen, sowohl Geschwindigkeit als auch Wellenvektor sind also komplex.

d) Wegen $E = 0$ setzten wir alle Impulse auf k_F. Wir haben gesehen, dass Teilchen und Löcher sich bei gleichem Impulsvorzeichen genau in entgegengesetzte Richtung bewegen. Somit bewegen sich nach rechts im normalen Metall

$$\psi_t(x) = \sqrt{\frac{m}{\hbar k_F}} \binom{1}{0} e^{+i k_F x}, \quad \psi_\ell(x) = \sqrt{\frac{m}{\hbar k_F}} \binom{0}{1} e^{-i k_F x} \tag{43}$$

und im Supraleiter

$$\psi_t(x) = \sqrt{\frac{m}{\hbar k_F}} \frac{1}{\sqrt{|u_0|^2 - |v_0|^2}} \binom{u_0}{v_0} e^{+i k_F x}, \quad \psi_\ell(x) = \sqrt{\frac{m}{\hbar k_F}} \frac{1}{\sqrt{|u_0|^2 - |v_0|^2}} \binom{v_0}{u_0} e^{-i k_F x} \tag{44}$$

Alle anderen Lösungen bewegen sich entsprechend nach links und der gesuchte Streuzustand hat die Form in Gl. (34) Zusammen mit der Stetigkeit der Ableitung erhält man 4 lineare Gleichungen zur Bestimmung der vier Koeffizienten. Diese kann man auf die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{u_0}{\sqrt{|u_0|^2-|v_0|^2}} & -\frac{v_0}{\sqrt{|u_0|^2-|v_0|^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{v_0}{\sqrt{|u_0|^2-|v_0|^2}} & -\frac{u_0}{\sqrt{|u_0|^2-|v_0|^2}} \\ -1 & 0 & -\frac{u_0}{\sqrt{|u_0|^2-|v_0|^2}} & +\frac{v_0}{\sqrt{|u_0|^2-|v_0|^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{v_0}{\sqrt{|u_0|^2-|v_0|^2}} & +\frac{u_0}{\sqrt{|u_0|^2-|v_0|^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{tt} \\ r_{t\ell} \\ t_{tt} \\ t_{t\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{45}$$

bringen und erhält die Lösung

$$\begin{pmatrix} r_{tt} \\ r_{t\ell} \\ t_{tt} \\ t_{t\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v_0}{u_0} \\ \frac{\sqrt{|u_0|^2 - |v_0|^2}}{u_0} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{46}$$

Wir sehen also, dass Teilchen ausschließlich als Löcher reflektiert werden. Dies wird als Andreev(retro)reflexion bezeichnet. Der Grund hierfür ist, dass wir bereits gesehen haben, dass für $E < \Delta$ Teilchenzustände (und Lochzustände) im Supraleiter exponentiell gedämpft sind, also nicht wirklich existieren können. Tatsächlich sind die wohldefinierten Zustände im Supraleiter solche, die aus zwei Teilchen bestehen. Um die Stromerhaltung an der Grensfläche zu gewährleisten, müssen Elektronen also als Löcher reflektiert werden und ein Strom von zwei Elementarladungen fließt von links nach rechts.