# Moderne Theoretische Physik I
# Grundlagen der Quantenmechanik

**Blatt 1**

Prof. A. Metelmann
S. Böhling, L. Orr, V. Stangier
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
**Abgabe bis:** 28.04.2023, 14:00 Uhr

**Das Übungsblatt wird in Gruppen von maximal 3 Personen bearbeitet. Die Abgabe erfolgt digital über ILIAS.**

## Aufgabe 1. Fouriertransformationen (9 Punkte)

In diesem Semester werden uns häufig Fouriertransformation begegnen. Wir verwenden die Definitionen auf Seite 13 des Skripts von Prof. Dr. T. Brandes, das auf der ILIAS-Seite zum Kurs zu finden ist. Für die Transformation zwischen Orts- $(x)$ und Impulsraum $(k)$ wird die folgende Konvention verwendet:

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx} \quad \text{Fourier-Transformierte von } f(x)$$
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \tilde{f}(k)\, e^{ikx} \quad \text{inverse Fouriertransformation.}$$

Bei der Transformation zwischen Zeit $(t)$ und Frequenz $(\omega)$ gilt die Definition:

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\, e^{i\omega t} \quad \text{Fourier-Transformierte von } f(t)$$
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \tilde{f}(\omega)\, e^{-i\omega t} \quad \text{inverse Fouriertransformation.}$$

1. Berechnen Sie die Fouriertransformationen von
   (a) (1 Punkt) $f_1(x) = \delta(x)$ und $\tilde{f}_2(k) = \delta(k)$
   (b) (1 Punkt) $f_3(x) = 1$ und $\tilde{f}_4(k) = 1$
   (c) (1 Punkt) $f_5(x) = \cos(k_0 x)$
   (d) (2 Punkte) $\tilde{f}_6(k) = e^{-ak^2/2}$ wobei $a \in \mathbb{R}$ und $a > 0$

2. (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte der Funktion $f_7(x) = -i\dfrac{\partial g(x)}{\partial x}$ für ein allgemeines differenzierbares $g(x)$ gegeben ist durch

$$\tilde{f}_7(k) = k\tilde{g}(k)\,,$$

wobei $\tilde{g}(k)$ die Fouriertransformierte der Funktion $g(x)$ ist. Nehmen Sie an, dass $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$.

3. (2 Punkte) Zuletzt betrachten wir die klassische Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2}.$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\psi(x,t) = \int \frac{dk}{2\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi}\, \tilde{\psi}(k,\omega)\, e^{i(kx-\omega t)}$$

eine Lösung der klassischen Wellengleichung ist. Was ist der Zusammenhang zwischen $\omega$ und $k$?

## Aufgabe 2. Eindimensionaler harmonischer Oszillator (7 Punkte)

In dieser Aufgabe wiederholen wir Rechnungen, die Sie aus der klassischen Mechanik kennen. Wir betrachten einen eindimensionalen harmonischen Oszillator mit kinetischer Energie $T = \frac{m}{2}\dot{x}^2$ und potentieller Energie $V = \frac{m\Omega^2}{2}x^2$.

1. (1 Punkt) Wie lauten die Lagrange- und Hamiltonfunktion?
2. (4 Punkte) Stellen Sie in beiden Formalismen die Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie eine von diesen (Lagrange oder Hamilton) für $x(t)$ und $p(t)$. Geben Sie deren Lösungen für die Anfangsbedingungen $x(t = 0) = x_0$ und $p(t = 0) = p_0$ an.
3. (2 Punkte) Drücken Sie die Hamiltonfunktion durch die zeitabhängigen Lösungen $x(t)$ und $p(t)$ aus Aufgabe 2.2 aus. Was fällt Ihnen bezüglich der Zeitabhängigkeit dieser Hamiltonfunktion auf? Was ist die physikalische Interpretation dieses Ergebnisses?

## Aufgabe 3. Schwarzkörperstrahlung (4 Punkte)

Die spektrale Dichte, die die Strahlung eines schwarzen Körpers beschreibt, ist gegeben durch die Planck Funktion. Wie wir in der Vorlesung gesehen haben kann die Planck Funktion für eine bestimmte Wellenlänge $\lambda$ bei einer Temperatur $T$ geschrieben werden als:

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}$$

In dieser Gleichung beschreibt $h$ die Planck Konstante, $k_B$ die Boltzmann Konstante und $c$ die Lichtgeschwindigkeit.

1. (2 Punkte) Bevor Planck die korrekte spektrale Beschreibung der Schwarzkörperstrahlung entdeckte, fanden zwei englische Physiker, Lord Rayleigh und James Jeans, eine Formel, die nur im Bereich langer Wellenlängen angewendet werden kann. Leiten Sie das Rayleigh-Jeans Gesetz her, indem Sie die Planck Funktion im Grenzfall großer Wellenlängen $\lambda \gg hc/k_B T$ auswerten. Die Planck Konstante wird in dieser Lösung verschwinden. Das Rayleigh-Jeans Gesetz ist ein klassisches Ergebnis, das die "Ultraviolettkatastrophe", die bei kurzen Wellenlängen auftritt, nicht vermeiden kann.
2. (2 Punkte) Erinnern Sie sich, dass die Frequenz $\nu$ und die Wellenlänge $\lambda$ des Lichts der Relation $\nu\lambda = c$ gehorchen. Bestimmen Sie die Form der Planck Funktion in Bezug auf die Frequenz $\nu$ bei Temperatur $T$, $B_\nu(T)$, indem Sie die oben gegebene Formel für $B_\lambda(T)$ benutzen. Tipp: Integration der Planck Funktion ergibt die Intensität der Schwarzkörperstrahlung. Die Strahlungsintensität über ein Wellenlängenintervall $(\lambda_1, \lambda_2)$, was durch folgendes Integral gegeben ist

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda\, B_\lambda(T)\,,$$

muss dasselbe Ergebnis liefern, wie die Strahlungsintensität, die Sie durch Integration von $B_\nu(T)$ über das entsprechende Frequenzintervall erhalten.