Moderne Theoretische Physik I
Grundlagen der Quantenmechanik

Blatt 2

Prof. A. Metelmann
S. Böhling, L. Orr, V. Stangier
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Abgabe bis: 05.05.2023, 14:00 Uhr

Das Übungsblatt wird in Gruppen von maximal 3 Personen bearbeitet. Die Abgabe erfolgt digital über ILIAS.

Aufgabe 1. Klassische Wirkung (6 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie die klassische Wirkung am Beispiel des freien Teilchens diskutiert. In dieser Aufgabe wenden wir uns zwei anderen Beispielen zu.

1. (3 Punkte) Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator mit der Lagrangefunktion $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2\right)$. Zeigen Sie, dass die klassische Wirkung für ein Zeitinterval $T = t_\mathrm{b} - t_\mathrm{a}$ mit $x(t_\mathrm{a}) = x_\mathrm{a}$ und $x(t_\mathrm{b}) = x_\mathrm{b}$ gegeben ist durch
$$S_\mathrm{cl} = \frac{m\omega}{2\sin(\omega T)}\left[\left(x_\mathrm{b}^2 + x_\mathrm{a}^2\right)\cos(\omega T) - 2x_\mathrm{b}x_\mathrm{a}\right]\,. \tag{1}$$

2. (3 Punkte) Finden Sie die klassische Wirkung S_cl für ein Teilchen, das sich im Feld einer konstanten Kraft F befindet. Nehmen Sie an, dass der Lagrangian für diesen Fall gegeben ist durch $L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + Fx$. Anmerkung: Sie können dieselben Anfangsbedingungen wie in Aufgabe 1.1 verwenden.

Aufgabe 2. Wahrscheinlichkeitsverteilungen (8 Punkte)

Eine Menge von Zuständen und die Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x)$ beschreiben eine Zufallsvariable x. Die charakteristische Funktion $G(k)$ stellt eine alternative Beschreibung von Zufallsvariablen dar. Mit der charakteristischen Funktion $G(k)$ kann man die Momente einer Verteilung bestimmen. Außerdem ist der natürliche Logarithmus von $G(k)$ die kumulantenerzeugende Funktion.

1. (2 Punkte) Die charakteristische Funktion $G(k)$ is definiert als die Fourier Transformation der Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x)$. Betrachten Sie die charakteristische Funktion einer Zufallsvariable x mit Erwartungswert μ_1 und Varianz σ^2
$$G(k) = e^{-ik\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma^2 k^2}\,. \tag{2}$$
Berechnen Sie die Verteilung $p(x)$ für diese charakteristische Funktion. Wie heißt diese Verteilung? Zeigen Sie, dass die Verteilung normalisiert ist.

2. (6 Punkte) Die momenterzeugende Funktion von zwei Zufallsvariablen x und y kann ausgedrückt werden als
$$G(k_1, k_2) = \sum_{m_1, m_2 = 0}^{\infty} \frac{(ik_1)^{m_1}(ik_2)^{m_2}}{m_1! m_2!}\langle x^{m_1} y^{m_2}\rangle\,. \tag{3}$$

Betrachten Sie die bivariate Gaußverteilung

$$p(x,y) = \frac{1}{\mathcal{N}} e^{-\frac{1}{2}\left(ax^2+2bxy+cy^2\right)} \tag{4}$$

wobei $a > 0$ und $\left(ac - b^2\right) > 0$. $\mathcal{N}$ ist eine Konstante, die die Normalisierung von $G(k_1, k_2)$ in $k_1 = k_2 = 0$ sicherstellt. Berechnen Sie die charakteristische Funktion und bestimmen Sie $\mathcal{N}$, die kumulantenerzeugende Funktion und die Kovarianzmatrix, wobei die Elemente der Kovarianzmatrix definiert sind als

$$V_{ij} = \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k_i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k_j} \ln G(k_1, k_2) \bigg|_{k_1=k_2=0} \tag{5}$$

wobei $i, j \in \{1, 2\}$ mit $x_1 = x$ und $x_2 = y$. Die off-diagonalen Elemente der Kovarianzmatrix stellen ein Maß der Korrelationen dar. Sind die beiden Zufallsvariablen in unserem Beispiel korreliert?

Aufgabe 3. Wellenpaket und Kontinuitätsgleichung (6 Punkte)

Auf dem letzten Blatt haben wir die klassische Wellengleichung betrachtet. Die Wellenfunktionen, die wir in der Quantenmechanik betrachten, verhalten sich ein bisschen anders. In dieser Aufgabe wollen wir ein Gefühl für die quantenmechanischen Wellenfunktionen bekommen. Dafür betrachten wir die zeitabhängige Wellenfunktion (mit $\sigma > 0$)

$$\psi(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\sqrt{\sigma\left(1 + i\frac{\hbar t}{2m\sigma^2}\right)}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2\left(1+i\frac{\hbar t}{2m\sigma^2}\right)}\right). \tag{6}$$

1. (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ zu allen Zeiten die Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, |\psi(x,t)|^2 = 1 \tag{7}$$

erfüllt.

2. (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ die Schrödingergleichung eines freien Teilchens erfüllt. Diese ist gegeben durch

$$i\hbar \partial_t \psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi(x,t)\,. \tag{8}$$

3. (1 Punkt) Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2$ zu verschiedenen Zeitpunkten $t' = \frac{t}{\tau}$, wobei $\tau = \frac{2m\sigma^2}{\hbar}$. Wie verändert sich die Form des Wellenpakets für große Zeiten?

4. (2 Punkte) Der Wahrscheinlichkeitsstrom in einer Dimension ist gegeben als

$$j(x,t) = \frac{\hbar}{2im} \left[\psi^*(x,t) \, \partial_x \psi(x,t) - (\partial_x \psi^*(x,t)) \, \psi(x,t)\right], \tag{9}$$

wobei $\psi^*(x,t)$ das komplex konjugierte der Wellenfunktion ist. Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho(x,t) + \partial_x j(x,t) = 0 \tag{10}$$

erfüllt. (Tipp: Wenn Sie viel rechnen wollen, berechnen Sie die Ableitungen explizit. Wenn sie wenig rechnen wollen, zeigen Sie, dass mit Erfüllung der Schrödingergleichung auch die Kontinuitätsgleichung gilt). Wie interpretieren Sie die Kontinuitätsgleichung?