Moderne Theoretische Physik I
Grundlagen der Quantenmechanik

Blatt 4

Prof. A. Metelmann
S. Böhling, L. Orr, V. Stangier
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Abgabe bis: 19.05.2023, 14:00 Uhr

Das Übungsblatt wird in Gruppen von maximal 3 Personen bearbeitet. Die Abgabe erfolgt digital über ILIAS.

Aufgabe 1. Unschärferelation (6 Punkte)

Gegeben sei ein Wellenpaket für ein freies Teilchen mit Impulsverteilung

$$g(k) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{1/4}} e^{-a^2 \frac{k^2}{4}} \,. \tag{1}$$

Wir betrachten ein Wellenpaket aus ebenen Wellen mit genau dieser Verteilung

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, g(k) e^{i(kx-\omega_k t)} \,, \qquad \text{wobei} \quad \omega_k = \hbar k^2/(2m). \tag{2}$$

1. (2 Punkte) Zunächst diskutieren wir den Zeitpunkt $t = 0$. Zeigen Sie, dass $\psi(x, 0)$ auch eine Gauß-Funktion ist und bestimmen Sie die Breite der Wahrscheinlichkeitsdichte. Wie hängt diese von a ab?

2. (2 Punkte) Die Standard-Abweichtung in Ort und Impuls seien definiert durch $\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$ bzw. $\Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2}$, wobei
$$\langle A\rangle(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x,t) A \psi(x,t) \tag{3}$$
der Erwartungswert des Operators A ist. Zeigen Sie für $t = 0$, dass $\Delta x \Delta p = \hbar/2$.

3. (2 Punkte) Bestimmen Sie nun $\psi(x, t)$ für beliebige t und diskutieren Sie das Verhalten von $|\psi(x, t)|^2$ mit der Zeit. Was erhalten Sie jetzt für $\Delta x \Delta p$?

Aufgabe 2. Kommutator-Algebra (7 Punkte)

Es seien Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$, der Kommutator $[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$. Beweisen Sie, dass

1. (1 Punkt) $[\hat{A}, \hat{A}] = 0$ und $[\hat{A}, c] = 0$ für einen beliebigen Skalar c.

2. (1 Punkt) $[\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{C}]$

3. (1 Punkt) die Jacobiidentität $[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$. Kennen Sie eine 2-Form im Funktionenraum, die sich ebenso verhält?

4. (2 Punkte) mit Induktionsbeweis: Aus $[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{A}] = 0$ folgt $[\hat{A^m}, \hat{B}] = m\hat{A}^{m-1}[\hat{A}, \hat{B}]$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$. *(Hinweis: Eventuell benötigen Sie für den Beweis die Identität $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$. Diese dürfen Sie ohne weiteren Beweis verwenden.*

5. (2 Punkte) die Baker-Campbell Hausdorff-Formel $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$ mihtilfe der obigen Ergebnisse. Es gelte weiterhin $[[\hat{A},\hat{B}],\hat{A}] = [[\hat{B},\hat{A}],\hat{B}] = 0$. Zeigen Sie dazu, dass die Funktion $f(t) = e^{t\hat{A}}e^{t\hat{B}}$ die Differentialgleichung $\partial f/\partial t = \left(\hat{A}+\hat{B}+t[\hat{A},\hat{B}]\right) f(t)$ erfüllt und lösen Sie diese. Die Exponentialfunktion ist als Taylorreihe zu verstehen:
$$e^{t\hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \hat{A}^n}{n!} \tag{4}$$

Aufgabe 3. Komplexer Vektorraum (7 Punkte)

In dieser Aufgabe verbinden wir den Raum quadratintegrabler Funktionen auf dem Interval $x \in [-L/2, L/2]$ mit einem komplexen Vektorraum mit einem inneren Produkt. Eine Funktion $u(x)$ wird quadratintegrabel genannt, wenn Folgendes gilt:
$$\int_{-L/2}^{L/2} |u(x)|^2 \, dx < \infty.$$
Nehmen Sie an, dass die Funktionen $u(x), v(x)$, und $w(x)$ alle quadratintegrabel sind. Indem man den Raum mit der gewöhnlichen Additionsoperation, $u(x)+v(x)$, und dem gewöhnlichen Skalarprodukt mit einer komplexen Variablen, $\alpha u(x)$, ausstattet, kann man zeigen, dass der Raum der quadratintegrablen Funktionen die Axiome eines komplexen Vektorraums erfüllt (das werden wir hier nicht explizit zeigen). Das Ergebnis ist, dass die quadratintegrablen Funktionen selbst Vektoren sind. Außerdem ist es möglich eine inneres Produkt auf dem Raum der quadratintegrablen Funktionen zu definieren:
$$\langle u(x), v(x)\rangle = \int_{-L/2}^{L/2} u^*(x)v(x)\, dx.$$

1. (5 Punkte) Der erste Teil dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass die Definition für $\langle u(x), v(x)\rangle$ die folgenden Eigenschaften eines inneren Produkts erfüllt (jede dieser Lösungen lässt sich in einer kurzen Form ausdrücken, nicht mehr als ein bis zwei Zeilen):
   (a) $\langle u(x), v(x)\rangle = \left(\langle v(x), u(x)\rangle\right)^*$
   (b) $\langle u(x), v(x)+w(x)\rangle = \langle u(x), v(x)\rangle + \langle u(x), w(x)\rangle$
   (c) $\langle u(x)+w(x), v(x)\rangle = \langle u(x), v(x)\rangle + \langle w(x), v(x)\rangle$
   (d) $\langle u(x), \alpha v(x)\rangle = \alpha\langle u(x), v(x)\rangle$
   (e) $\langle \alpha u(x), v(x)\rangle = \alpha^*\langle u(x), v(x)\rangle$

2. (2 Punkte) Wir wissen, dass man jede quadratintegrable Funktion auf einem endlichen Interval durch eine Fourierreihe ausdrücken kann:
$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}A_0 + \sqrt{\frac{2}{L}}\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi kx}{L}\right) + B_k \sin\left(\frac{2\pi kx}{L}\right). \tag{5}$$
   Es ist wichtig, dass die Funktion quadratintegrabel ist, damit die Koeffizienten der Fourierreihe, A_k und B_k, wohldefiniert sind. Wir nehmen dann an, dass die Menge der Funktionen, $\phi_n(x)$, definiert als
$$\phi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{L}} & \text{für } n = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\pi(n+1)x/L\right) & \text{für } n = 1,3,5,\ldots \\ \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\pi n x/L\right) & \text{für } n = 2,4,6\ldots \end{cases} \tag{6}$$
   als Basis des Vektorraums der quadratintegrablen Funktionen dient. Damit diese Menge von Funktionen eine Basis darstellt, muss sich zunächst jede quadratintegrable Funktion durch eine Fourierreihe ausdrücken lassen. Dies können Sie als gegeben annehmen. Zeigen Sie nun, dass diese Menge von Funktionen außerdem orthonormal ist, indem Sie Folgendes beweisen (Hinweis: Sie können einige der Integrale aus der letzten Hausaufgabe verwenden):
   (a) Die Funktionen sind normiert, d.h. $\langle \phi_n(x), \phi_n(x)\rangle = 1$.
   (b) Die Funktionen sind orthogonal, d.h. $\langle \phi_n(x), \phi_m(x)\rangle = 0$, wenn $n \neq m$.