Moderne Theoretische Physik I
Grundlagen der Quantenmechanik

Blatt 4

Prof. A. Metelmann
S. Böhling, L. Orr, V. Stangier
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Abgabe bis: 19.05.2023, 14:00 Uhr

Das Übungsblatt wird in Gruppen von maximal 3 Personen bearbeitet. Die Abgabe erfolgt digital über ILIAS.

Aufgabe 1. Unschärferelation (6 Punkte)

Gegeben sei ein Wellenpaket für ein freies Teilchen mit Impulsverteilung

$$g(k) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{1/4}} e^{-a^2 \frac{k^2}{4}} \,. \tag{1}$$

Wir betrachten ein Wellenpaket aus ebenen Wellen mit genau dieser Verteilung

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, g(k) e^{i(kx-\omega_k t)} \,, \qquad \text{wobei} \quad \omega_k = \hbar k^2/(2m). \tag{2}$$

1. (2 Punkte) Zunächst diskutieren wir den Zeitpunkt $t = 0$. Zeigen Sie, dass $\psi(x,0)$ auch eine Gauß-Funktion ist und bestimmen Sie die Breite der Wahrscheinlichkeitsdichte. Wie hängt diese von a ab?
2. (2 Punkte) Die Standard-Abweichtung in Ort und Impuls seien definiert durch $\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$ bzw. $\Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2}$, wobei
$$\langle A\rangle(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x,t) A \psi(x,t) \tag{3}$$
der Erwartungswert des Operators A ist. Zeigen Sie für $t = 0$, dass $\Delta x \Delta p = \hbar/2$.
3. (2 Punkte) Bestimmen Sie nun $\psi(x,t)$ für beliebige t und diskutieren Sie das Verhalten von $|\psi(x,t)|^2$ mit der Zeit. Was erhalten Sie jetzt für $\Delta x \Delta p$?

Lösung Aufgabe 1.

1. Zunächst diskutieren wir den Zeitpunkt $t = 0$,
$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, g(k) e^{ikx} = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{3/4}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \exp(-a^2k^2/4 + ikx) \,.$$
Mittels quadratischer Ergänzung erhalten wir
$$a^2k^2/4 - ikx = (a/2)^2 \left[k^2 - i4kx/a^2 + (i2x/a^2)^2\right] - a^2(ix/a^2)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \left[k - i\frac{2x}{a^2}\right]^2 + \frac{x^2}{a^2}$$

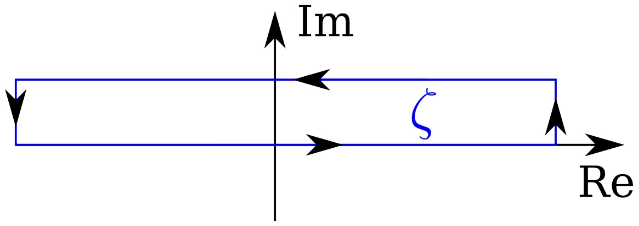

Figure 1: Skizze zur Lösung von Aufgabe 1.1.

und damit

$$\psi(x,0) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{3/4}} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dk \, \exp\left(-\left(\frac{a^2}{2}\right)^2 \left[k - i\frac{2x}{a^2}\right]^2\right) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{3/4}} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} du \, e^{-\left(\frac{a^2}{2}\right)^2 u^2}$$

Beachten Sie, dass im letzten Schritt die Substitution $u = k - i\frac{2x}{a^2}$ gemacht wurde. Da das Integral über die in der Abbildung gezeigten Kontur ζ verschwindet, entspricht das Integral über die Achse $\{k - i2s/a^2 | k \in (-\infty\,,\infty)\}$ gerade dem Integral über die reelle Achse. Das Gauß-Integral liefert schließlich

$$\psi(x,0) = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4} \exp(-x^2/a^2)\,.$$

Die Breite der Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi|^2$ ist gegeben durch $a/2$, d.h. sie ist gerade invers-proportional zur Breite der Impulsverteilung.

2. Zunächst berechnen wir explizit die Integrale

$$\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, x \, \exp(-2x^2/a^2) = 0 \\
\langle x^2 \rangle &= \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, x^2 \, \exp(-2x^2/a^2) = \frac{a^2}{4} \\
\langle -i\partial_x \rangle &= -i \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \left(-\frac{2x}{a^2}\right) \exp(-2x^2/a^2) = 0 \\
\langle -\partial_x^2 \rangle &= \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \left(\frac{2x}{a^2} - \frac{4}{a^4}x^2\right) \exp(-2x^2/a^2) = \frac{1}{a^2}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir $\Delta x \Delta p = \hbar(\langle x^2 \rangle \langle k^2 \rangle)^{1/2} = \hbar/2$.

3. Nun bestimmen wir $\psi(x,t)$ für beliebige Zeiten,

$$\begin{aligned}
\psi(x,t) &= \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{3/4}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, \exp\left(-a^2k^2/4 + ikx - i\omega_k t\right) \\
&= \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{3/4}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, \exp\left(-\left[a^2 + i\frac{2\hbar}{m}t\right] k^2/4 + ikx\right)
\end{aligned}$$

Mit der Definition $\alpha^2 = \left[a^2 + i\frac{2\hbar}{m}t\right]$ erhalten wir das Integral aus 1.1

$$\begin{aligned}
\psi(x,t) &= \sqrt{\frac{a}{\alpha}} \frac{\sqrt{\alpha}}{(2\pi)^{3/4}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, \exp\left(-\alpha^2k^2/4 + ikx\right) = \sqrt{\frac{a}{\alpha}} \left(\frac{2}{\pi\alpha^2}\right)^{1/4} \exp(-x^2/\alpha^2) \\
&= \left(\frac{2a^2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\left[a^2 + i\frac{2\hbar}{m}t\right]^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2 + i\frac{2\hbar}{m}t}\right)
\end{aligned}$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\psi^*(x,t)\psi(x,t) = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/2} \frac{1}{\left[1+\frac{4\hbar^2}{m^2a^4}t^2\right]^{1/2}} \exp\left(-\frac{2x^2}{a^2(1+\frac{4\hbar^2}{m^2a^4}t^2)}\right)$$

D. h. im Vergleich zum Fall $t=0$ verhält sich die effektive Breite nun wie $\beta = a\sqrt{1+\frac{4\hbar^2}{m^2a^4}t^2}$. Das Wellenpaket zerfließt also, wird breiter und die Amplitude nimmt ab. Desweiterenfinden wir

$$\begin{aligned}
\langle x^2\rangle &= \left(\frac{2}{\pi\beta^2}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2 \exp(-2x^2/\beta^2) = \frac{\beta^2}{4} \\
\langle -\partial_x^2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x,t)(-\partial_x^2)\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, (\partial_x\psi^*(x,t))(\partial_x\psi(x,t)) \\
&= \left(\frac{2}{\pi\beta^2}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{4x^2}{|\alpha|^4} \exp(-2x^2/\beta^2) = \frac{\beta^2}{|\alpha|^4} \\
&= \frac{1}{a^2}
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\Delta x \Delta p = \hbar\left(\langle x^2\rangle\langle k^2\rangle\right)^{1/2} = \hbar/2\left(1+\frac{4\hbar^2}{m^2a^4}t^2\right)1/2 \geq \hbar/2\,.$$

Zum Zeitpunkt $t=0$ hat das Wellenpaket also eine minimale Unschärfe.

Aufgabe 2. Kommutator-Algebra (7 Punkte)

Es seien Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$, der Kommutator $[\hat{A},\hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$. Beweisen Sie, dass

1. (1 Punkt) $[\hat{A},\hat{A}] = 0$ und $[\hat{A},c] = 0$ für einen beliebigen Skalar c.
2. (1 Punkt) $[\hat{A}+\hat{B},\hat{C}] = [\hat{A},\hat{C}] + [\hat{B},\hat{C}]$
3. (1 Punkt) die Jacobiidentität $[\hat{A},[\hat{B},\hat{C}]] + [\hat{B},[\hat{C},\hat{A}]] + [\hat{C},[\hat{A},\hat{B}]] = 0$. Kennen Sie eine 2-Form im Funktionenraum, die sich ebenso verhält?
4. (2 Punkte) mit Induktionsbeweis: Aus $[[\hat{A},\hat{B}],\hat{A}] = 0$ folgt $[\hat{A^m},\hat{B}] = m\hat{A}^{m-1}[\hat{A},\hat{B}]$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$.
5. (2 Punkte) die Baker-Campbell Hausdorff-Formel $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$ mihtilfe der obigen Ergebnisse. Es gelte weiterhin $[[\hat{A},\hat{B}],\hat{A}] = [[\hat{B},\hat{A}],\hat{B}] = 0$. Zeigen Sie dazu, dass die Funktion $f(t) = e^{t\hat{A}}e^{t\hat{B}}$ die Differentialgleichung $\partial f/\partial t = \left(\hat{A}+\hat{B}+t[\hat{A},\hat{B}]\right) f(t)$ erfüllt und lösen Sie diese. Die Exponentialfunktion ist als Taylorreihe zu verstehen:
$$e^{t\hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\hat{A}^n}{n!} \tag{4}$$

Lösung Aufgabe 2.

1. (1 Punkt) $[\hat{A},\hat{A}] = \hat{A}\hat{A} - \hat{A}\hat{A} = 0$ und $[\hat{A},c] = \hat{A}c - c\hat{A} = 0$
2. (1 Punkt) $[\hat{A}+\hat{B},\hat{C}] = \hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A} - \hat{C}\hat{B} = [\hat{A},\hat{C}] + [\hat{B},\hat{C}]$
3. (1 Punkt) Die drei einzelnen Terme der Jacobi Identität
$$[\hat{A},[\hat{B},\hat{C}]] = [\hat{A},\hat{B}\hat{C}-\hat{C}\hat{B}] = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{A}\hat{C}\hat{B} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} + \hat{C}\hat{B}\hat{A} \tag{5}$$
$$[\hat{B},[\hat{C},\hat{A}]] = [\hat{B},\hat{C}\hat{A}-\hat{A}\hat{C}] = \hat{B}\hat{C}\hat{A} - \hat{B}\hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}\hat{B} \tag{6}$$
$$[\hat{C},[\hat{A},\hat{B}]] = [\hat{C},\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}] = \hat{C}\hat{A}\hat{B} - \hat{C}\hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B}\hat{C} + \hat{B}\hat{A}\hat{C} \tag{7}$$

addieren sich tatsächlich zu Null auf. Hier sehen wir wieder die Korrespondenz zur klassischen Hamilton Mechanik, wo die Poisson-Klammer

$$\{f, g\} = \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right] \tag{8}$$

dieselbe Eigenschaft hat.

4. (2 Punkte) Für $m = 1$ gilt $[\hat{A}^m, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ und $m\hat{A}^{m-1}[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ und damit ist $[\hat{A}^m, \hat{B}] = m\hat{A}^{m-1}[\hat{A}, \hat{B}]$ erfüllt. Für ein beliebiges $m \geq 1$ starten wir von der linken Seite für $m + 1$:

$$(m+1)\hat{A}^m[\hat{A}, \hat{B}] = m\hat{A}\hat{A}^{m-1}[\hat{A}, \hat{B}] + \hat{A}^m[\hat{A}, \hat{B}] \tag{9}$$
$$= \hat{A}[\hat{A}^m, \hat{B}] + \hat{A}^m[\hat{A}, \hat{B}] \tag{10}$$
$$= \hat{A}[\hat{A}^m, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{A}^m + [\hat{A}^m, [\hat{A}, \hat{B}]]. \tag{11}$$

Es reicht also zu zeigen, dass $[\hat{A}^m, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$ und dass $\hat{A}[\hat{A}^m, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{A}^m = [\hat{A}\hat{A}^m, \hat{B}]$. Mit der Identität $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$ ergibt sich die zweite Gleichung trivial und mit der Angabe $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$ ergibt sich auch die erste Gleichung.

5. (2 Punkte) Es ist $f(t) = e^{t\hat{A}}e^{t\hat{B}}$ wobei die Exponentialfunktion

$$f_{\hat{A}}(t) = e^{t\hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\hat{A})^n}{n!} \tag{12}$$

als Taylorreihe zu verstehen ist. Die Ableitung nach t erfolgt dann in dieser Form

$$\frac{\partial f_{\hat{A}}(t)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt^{n-1}\hat{A}^n}{n!} = \hat{A}f_{\hat{A}}(t) = f_{\hat{A}}\hat{A}. \tag{13}$$

Bei der Funktion $f(t)$ nutzt man die Kettenregel und beachtet dabei, dass hier die Operatorreihenfolge ($\hat{A}$ und $\hat{B}$) nicht vertauscht werden darf. Es gilt dann

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} = \hat{A}e^{t\hat{A}}e^{t\hat{B}} + e^{t\hat{A}}\hat{B}e^{t\hat{B}} = (\hat{A} + e^{t\hat{A}}\hat{B}e^{-t\hat{A}})f(t). \tag{14}$$

Im letzten Schritt haben wir die Identität $e^{-t\hat{A}}e^{t\hat{A}} = 1$ eingefügt. Wir nutzen wieder die Taylorschreibweise der Exponentialfunktion und finden

$$[e^{t\hat{A}}, \hat{B}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}[\hat{A}^n, \hat{B}] = \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{t^n\hat{A}^{n-1}}{n!}[\hat{A}, \hat{B}] = te^{t\hat{A}}[\hat{A}, \hat{B}] = t[\hat{A}, \hat{B}]e^{t\hat{A}}. \tag{15}$$

Hier kam das Ergebnis aus der obigen Teilaufgabe zur Anwendung. So erhält man wie gewünscht

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} = (\hat{A} + \hat{B} + t[\hat{A}, \hat{B}])f(t). \tag{16}$$

Aus den Eigenschaften $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$ folgt auch $[\hat{A} + \hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$. Damit lässt sich die Differentialgleichung lösen durch

$$f(t) = e^{t(\hat{A}+\hat{B})}e^{\frac{1}{2}t^2[\hat{A}, \hat{B}]}. \tag{17}$$

Beachte, dass die Anfangsbedingung $f(t = 0) = 1$ erfüllt ist. Damit haben wir zwei äquivalente Darstellungen derselben Funktion gefunden, die für alle t gelten muss. Es gilt somit bei $t = 1$, dass

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}}e^{\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]}. \tag{18}$$

Multipliziert man noch $e^{-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]}$ von rechts an diese Gleichung ist die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel bewiesen.

Aufgabe 3. Komplexer Vektorraum (7 Punkte)

In dieser Aufgabe verbinden wir den Raum quadratintegrabler Funktionen auf dem Interval $x \in [-L/2, L/2]$ mit einem komplexen Vektorraum mit einem inneren Produkt. Eine Funktion $u(x)$ wird quadratintegrabel genannt, wenn Folgendes gilt:

$$\int_{-L/2}^{L/2} |u(x)|^2 \, dx < \infty.$$

Nehmen Sie an, dass die Funktionen $u(x), v(x)$, und $w(x)$ alle quadratintegrabel sind. Indem man den Raum mit der gewöhnlichen Additionsoperation, $u(x) + v(x)$, und dem gewöhnlichen Skalarprodukt mit einer komplexen Variablen, $\alpha u(x)$, ausstattet, kann man zeigen, dass der Raum der quadratintegrablen Funktionen die Axiome eines komplexen Vektorraums erfüllt (das werden wir hier nicht explizit zeigen). Das Ergebnis ist, dass die quadratintegrablen Funktionen selbst Vektoren sind. Außerdem ist es möglich eine inneres Produkt auf dem Raum der quadratintegrablen Funktionen zu definieren:

$$\langle u(x), v(x) \rangle = \int_{-L/2}^{L/2} u^*(x) v(x) \, dx.$$

1. (5 Punkte) Der erste Teil dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass die Definition für $\langle u(x), v(x) \rangle$ die folgenden Eigenschaften eines inneren Produkts erfüllt (jede dieser Lösungen lässt sich in einer kurzen Form ausdrücken, nicht mehr als ein bis zwei Zeilen):
   (a) $\langle u(x), v(x) \rangle = \big(\langle v(x), u(x) \rangle\big)^*$
   (b) $\langle u(x), v(x) + w(x) \rangle = \langle u(x), v(x) \rangle + \langle u(x), w(x) \rangle$
   (c) $\langle u(x) + w(x), v(x) \rangle = \langle u(x), v(x) \rangle + \langle w(x), v(x) \rangle$
   (d) $\langle u(x), \alpha v(x) \rangle = \alpha \langle u(x), v(x) \rangle$
   (e) $\langle \alpha u(x), v(x) \rangle = \alpha^* \langle u(x), v(x) \rangle$

2. (2 Punkte) Wir wissen, dass man jede quadratintegrable Funktion auf einem endlichen Interval durch eine Fourierreihe ausdrücken kann:

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} A_0 + \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi k x}{L}\right) + B_k \sin\left(\frac{2\pi k x}{L}\right). \tag{19}$$

   Es ist wichtig, dass die Funktion quadratintegrabel ist, damit die Koeffizienten der Fourierreihe, A_k und B_k, wohldefiniert sind. Wir nehmen dann an, dass die Menge der Funktionen, $\phi_n(x)$, definiert als

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{L}} & \text{für } n = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\pi(n+1)x/L\right) & \text{für } n = 1, 3, 5, \dots \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\pi n x/L\right) & \text{für } n = 2, 4, 6 \dots \end{cases} \tag{20}$$

   als Basis des Vektorraums der quadratintegrablen Funktionen dient. Damit diese Menge von Funktionen eine Basis darstellt, muss sich zunächst jede quadratintegrable Funktion durch eine Fourierreihe ausdrücken lassen. Dies können Sie als gegeben annehmen. Zeigen Sie nun, dass diese Menge von Funktionen außerdem orthonormal ist, indem Sie Folgendes beweisen (Hinweis: Sie können einige der Integrale aus der letzten Hausaufgabe verwenden):
   (a) Die Funktionen sind normiert, d.h. $\langle \phi_n(x), \phi_n(x) \rangle = 1$.
   (b) Die Funktionen sind orthogonal, d.h. $\langle \phi_n(x), \phi_m(x) \rangle = 0$, wenn $n \neq m$.

Lösung Aufgabe 3.

1. Most of the properties here just follow from the linearity of the integral.

(a)

$$\big(\langle v(x), u(x)\rangle\big)^* = \left(\int_{-L/2}^{L/2} v^*(x)u(x)\,dx\right)^* = \int_{-L/2}^{L/2} (v^*(x))^* u^*(x)\,dx^* = \int_{-L/2}^{L/2} v(x)u^*(x)\,dx = \langle u(x), v(x)\rangle$$

(b)

$$\begin{aligned}\langle u(x), v(x)+w(x)\rangle &= \int_{-L/2}^{L/2} u^*(x)\Big(v(x)+w(x)\Big)\,dx = \int_{-L/2}^{L/2} u^*(x)v(x)\,dx + \int_{-L/2}^{L/2} u^*(x)w(x)\,dx \\ &= \langle u(x), v(x)\rangle + \langle u(x), w(x)\rangle\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\langle u(x)+w(x), v(x)\rangle &= \int_{-L/2}^{L/2} \Big(u(x)+w(x)\Big)^* v(x)\,dx = \int_{-L/2}^{L/2} \Big(u^*(x)+w^*(x)\Big)v(x)\,dx \\ &= \int_{-L/2}^{L/2} u^*(x)v(x)\,dx + \int_{-L/2}^{L/2} w^*(x)v(x)\,dx = \langle u(x), v(x)\rangle + \langle w(x), v(x)\rangle\end{aligned}$$

(d)

$$\langle u(x), \alpha v(x)\rangle = \int_{-L/2}^{L/2} u^*(x)\alpha v(x)\,dx = \alpha\int_{-L/2}^{L/2} u^*(x)v(x)\,dx = \alpha\langle u(x), v(x)\rangle$$

(e)

$$\langle \alpha u(x), v(x)\rangle = \int_{-L/2}^{L/2} \Big(\alpha u(x)\Big)^* v(x)\,dx = \alpha^*\int_{-L/2}^{L/2} u^*(x)v(x)\,dx = \alpha^*\langle u(x), v(x)\rangle$$

2. This is just solving integrals, and there is no need to give very detailed calculations on how to evaluate these.

(a)

$$\begin{aligned} n=0 : \langle \phi_0(x), \phi_0(x)\rangle &= \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{L}dx = L\frac{1}{L} = 1 \\ n=1,3,\dots : \langle \phi_n(x), \phi_n(x)\rangle &= \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} \cos^2\left(\pi(n+1)x/L\right)\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2}\Big[1+\cos\left(2\pi(n+1)x/L\right)\Big]\,dx \\ &= \frac{1}{L}\left[L + \frac{L}{\pi(n+1)}\sin\left(\pi(n+1)\right)\right] = 1 \\ n=2,4,\dots : \langle \phi_n(x), \phi_n(x)\rangle &= \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} \sin^2\left(\pi n x/L\right)\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2}\Big[1-\cos\left(2\pi n x/L\right)\Big]\,dx \\ &= \frac{1}{L}\left[L - \frac{L}{\pi n}\sin\left(\pi n\right)\right] = 1\end{aligned}$$

We can therefore conclude that the set of functions $\phi_n(x)$ is normalised.

(b) Slightly more integrals to evaluate here, but again they are all very easy (especially if we use results from the previous assignment). We start with the inner products with $\phi_0(x)$:

$$\begin{aligned} n=1,3,\dots : \langle \phi_0(x), \phi_n(x)\rangle\ &\frac{\sqrt{2}}{L}\int_{-L/2}^{L/2} \cos(\pi(n+1)x\ L)dx = \frac{2\sqrt{2}}{\pi(n+1}\sin\left(\frac{\pi(n+1)}{2}\right) = 0 \\ n=2,4,\dots : \langle \phi_0(x), \phi_n(x)\rangle\ &\frac{\sqrt{2}}{L}\int_{-L/2}^{L/2} \sin(\pi(n+1)x\ L)dx = 0 \ \text{ since sine is odd over the interval.}\end{aligned}$$

Now we move onto the case where m, n are odd, but $m \neq n$:

$$\begin{aligned}\langle \phi_m(x), \phi_n(x) \rangle &= \frac{2}{L} \int_{L/2}^{L/2} \cos\left(\pi(m+1)x/L\right) \cos\left(\pi(n+1)x/L\right)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin([m-n]\pi/2)}{m-n} + \frac{\sin([m+n+2]\pi/2)}{m+n+2} \right) = 0.\end{aligned}$$

And now the case where m, n are non-zero even numbers, but where $m \neq n$:

$$\begin{aligned}\langle \phi_m(x), \phi_n(x) \rangle &= \frac{2}{L} \int_{L/2}^{L/2} \sin\left(\pi m x/L\right) \sin\left(\pi n x/L\right)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin([m-n]\pi/2)}{m-n} - \frac{\sin([m+n]\pi/2)}{m+n} \right) = 0.\end{aligned}$$

And lastly the case where m is odd, and n is non-zero even:

$$\langle \phi_m(x), \phi_n(x) \rangle = \frac{2}{L} \int_{L/2}^{L/2} \cos\left(\pi(m+1)x/L\right) \sin\left(\pi n x/L\right)\, dx = 0$$

Since the integrand is odd in the interval $x \in [-L/2, L/2]$ this integral is 0 by inspection.

This set of functions is therefore orthogonal.