Moderne Theoretische Physik I

Grundlagen der Quantenmechanik

Blatt 5

Prof. A. Metelmann
S. Böhling, L. Orr, V. Stangier
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Abgabe bis: 26.05.2023, 14:00 Uhr

Das Übungsblatt wird in Gruppen von maximal 3 Personen bearbeitet. Die Abgabe erfolgt digital über ILIAS.

Aufgabe 1. Hilbert-Raum (5 Punkte)

$\mathcal{H}$ sei die Menge aller Spaltenvektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = (a_n), \quad (1)$$

deren Komponenten komplexe Zahlen sind mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty. \quad (2)$$

Addition und Multiplikation mit einer komplexen Zahl seien komponentenweise erklärt:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_n + b_n), \quad (3)$$

$$c\mathbf{a} = c(a_n) \quad (4)$$

Das Skalarprodukt sei wie folgt definiert:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* b_n. \quad (5)$$

- (3 Punkte) Wiederholen Sie mit einem Lehrbuch Ihrer Wahl zur Quantenmechanik (z.B. Fließbach, Teil V) das Thema Hilberträume. Fassen Sie dann kurz zusammen, was ein Hilbertraum ist.
- (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum ist.

Aufgabe 2. Dirac Notation (8 Punkte)

Wir betrachten drei verschiedene Basen des Hilbertraumes: Die Ortsbasis $\{|x\rangle\}$, die Wellenzahlbasis $\{|k\rangle\}$ (beides sind kontinuierliche Basen) und eine nicht weiter spezifizierte diskrete (abzählbar unendliche) Basis $\{|n\rangle\}$, wobei $n \in \mathbb{N}$.

- (2 Punkte) Die Wellenzahlbasis $\{|k\rangle\}$ ist gegeben durch die Menge der Eigenfunktionen des Wellenzahloperators $\hat{k} = \hat{p}/\hbar$, d.h. $\hat{k}|k\rangle = k|k\rangle$. Schreiben Sie den Impulsoperator in der Ortsraumdarstellung und bestimmen Sie die Eigenfunktionen $\psi_k(x) = \langle x|k\rangle$ durch Lösen der Differentialgleichung. Berücksichtigen Sie dabei, dass die Basisfunktionen orthonormiert sind im Sinne

$$\int dx \psi_q(x)^* \psi_k(x) = \delta(q - k). \quad (6)$$

2. (1 Punkte) Drücken Sie den Identitätsoperator $\hat{1}$ in jeder der drei Basen aus. Verifizieren Sie explizit für die Ortsdarstellung, dass $\langle q|\hat{1}|k\rangle = \langle q|k\rangle$ gilt. *Hinweis: Dieser Identitätsoperator hilft Ihnen bei allen folgenden Aufgaben.*
3. (1 Punkt) Sei $\hat{A}$ ein Operator, dessen Eigenzustände durch $\{|n\rangle\}$ gegeben sind. Drücken Sie $\hat{A}$ in der Dirac Notation durch diese Eigenfunktionen und Eigenwerte A_n aus.
4. (2 Punkte) Entwickeln Sie die Zustände $|x\rangle$ und $|k\rangle$ jeweils in der Orts- und Wellenzahlbasis.
5. (1 Punkt) Betrachten Sie den allgemeinen Zustand $|\phi\rangle$. Was ist die Ortsraumdarstellung $\phi(x)$ dieses Zustandes und wie sieht seine Ortsraumentwicklung aus?
6. (1 Punkt) Betrachten Sie den Zustand $|\phi\rangle$ mit der Wellenzahldarstellung

$$\phi(k) = \langle k|\phi\rangle = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-k^2/(4\sigma^2)}. \quad (7)$$

Finden Sie seine Ortsraumdarstellung $\phi(x) = \langle x|\phi\rangle$.

Aufgabe 3. Cauchy Folge (7 Punkte)

Betrachten Sie die Menge kontinuierlicher, reeller Funktionen definiert auf dem geschlossenen Intervall $[0, 2]$, $C([0, 2]) = \{f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist kontinuierlich}\}$. Mit den gewöhnlichen Definitionen von Addition und Multiplikation mit einem Skalar bilden diese Funktionen einen reellen Vektorraum. Wir können das geöhnliche innere Produkt auf diesem Raum definieren als

$$\langle f|g\rangle = \int_0^2 f(x)g(x)dx, \quad (8)$$

was natürlich eine Norm induziert. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktion

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{wenn } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{wenn } 1 < x \leq 2 \end{cases}. \quad (9)$$

Dieses innere Produkt induziert eine Norm im Vektorraum, $\|v\| = \sqrt{\langle v|v\rangle}$, was uns ein Längenmaß liefert. Jetzt nehmen Sie an, dass $(v_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge von Vektoren in diesem normierten Vektorraum ist. Diese Folge heißt "Cauchy Folge", wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass gilt $\|v_n - v_m\| < \epsilon$, wenn $n, m > N$. Was diese Definition aussagt ist, dass sich die Elemente in dieser Reihe bei Fortschreiten der Reihe beliebig nah zueinander befinden. Dies ist eine stärkere Definition als die gewöhnliche Definition der Konvergenz, wo sich aufeinander folgende Elemente in einer Reihe beliebig nah zueinander befinden $\|v_n - v_{n+1}\| < \epsilon$, da es sich auf die gesamte Folge bezieht. In diesem Problem müssen Sie Folgendes beweisen:

1. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine Cauchy Folge ist. [Bemerkung: Bei der Durchführung dieser Art von Beweisen ist es der erste Schritt einfach nur $\|v_n - v_m\|$ für ein beliebiges n und m zu berechnen. Da $n, m \geq N$, wollen wir prüfen, dass $\|v_n - v_m\| \leq g(N)$, wobei $g(N)$ eine Funktion ist, die abnimmt während N zunimmt. Auf diese Weise zeigen wir, dass die Elemente der Folge konvergieren. Da wir eigentlich zeigen wollen, dass $\|v_m - v_n\| < \epsilon$, können wir dies benutzen, um die "korrekte" Beziehung $g(N) < \epsilon$ zu bestimmen, was für diesen Beweis gefordert ist.]
2. (3 Punkte) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n=1}^\infty$ in $C([0, 2])$ nicht konvergiert. [Tipp: Diese Aufgabe fordert von Ihnen zu zeigen, dass die Reihe in eine unstetige Funktion f konvergiert. Dieser Beweis funktioniert anders herum, das wir zuerst f erraten müssen. Dann müssen wir zeigen, dass für jedes $\epsilon > 0$ ein existiert, sodass wenn $n \geq N$, dann $\|f_n - f\| < \epsilon$.]