
Moderne Theoretische Physik I

Grundlagen der Quantenmechanik

Blatt 7

Prof. A. Metelmann
S. Böhling, L. Orr, V. Stangier
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Abgabe bis: 16.06.2023, 14:00 Uhr

Das Übungsblatt wird in Gruppen von maximal 3 Personen bearbeitet. Die Abgabe erfolgt digital über ILIAS.

Aufgabe 1. Kohärente Zustände und der Displacement Operator (9 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie den kohärenten Zustand kennengelernt, der als Eigenvektor des Vernichtungsoperators definiert werden kann $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$. Wir können den kohärenten Zustand als Reihe in der Besetzungszahl Eigenbasis schreiben als:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

Es ist auch möglich, den kohärenten Zustand als verschobenen Vakuumzustand zu definieren $\hat{D}(\alpha)|0\rangle = |\alpha\rangle$, wobei $\hat{D}(\alpha)$ den Displacement Operator beschreibt:

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}} = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^*\hat{a}} = e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\alpha^*\hat{a}} e^{\alpha\hat{a}^\dagger}.$$

Die unterschiedlichen Ausdrücke für $\hat{D}(\alpha)$ sind eine Folge davon, dass das Exponential von zwei Operatoren geschrieben werden kann als $e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2}$, wenn es sich um zwei Operatoren mit konstantem Kommutator $[A,B] = \text{konst.}$ handelt. Dies ist eine Anwendung der Baker-Campbell-Hausdorff Formel, auch "BCH" genannt.

- (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Adjungierte des Displacement Operators eine Verschiebung von umgekehrtem Betrag ist, d.h. $\hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}(-\alpha)$. Als Folge hiervon ist der Displacement Operator ein unitärer Operator.
- (1 Punkt) Zeigen Sie folgende Eigenschaft des Displacement Operators:

$$\hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta) = e^{(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)/2} \hat{D}(\alpha + \beta).$$

Hinweis: Benutzen Sie die BCH Formel aus der Einleitung.

- (3 Punkte) Für dieses Problem werden wir eine andere Identität benutzen, die ebenfalls mit BCH im Zusammenhang steht. Für zwei beliebige Operatoren Y und Z gilt:

$$e^Z Y e^{-Z} = Y + [Z, Y] + \frac{1}{2!} [Z, [Z, Y]] + \frac{1}{3!} [Z, [Z, [Z, Y]]] + \dots$$

Diese Reihe von Kommutatoren setzt sich in einer offensichtlichen Weise fort. Diese Formel ist sehr praktisch, wenn unitäre Transformationen auf Operatoren angewandt werden. Benutzen Sie dies um zu zeigen, wie $\hat{D}(\alpha)$ den Erzeugungs- und Vernichtungsoperator "verschiebt", d.h. berechnen Sie:

- $\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha)$
- $\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}^\dagger\hat{D}(\alpha)$
- $\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{D}(\alpha)$.

4. (1 Punkt) Berechnen Sie die Verschiebung eines kohärenten Zustands $\hat{D}(\beta)|\alpha\rangle$.
5. (3 Punkte) Erinnern Sie sich daran, dass wir Orts- und Impulsoperator durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ausdrücken können als $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$ und $\hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$ (wobei alle anderen physikalischen Parameter hier eins gesetzt wurden). Berechnen Sie die Standardabweichung des Orts- und Impulsoperators Δx und Δp , sowie die Unschärfe $\Delta x \Delta p$ für einen kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$. Was fällt Ihnen bezüglich des Ergebnisses der Unschärfe auf? (Hinweis: Sie sollten ausnutzen, dass $\langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \alpha^*\langle\alpha|$ und $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ um diese Rechnung zu vereinfachen.)

Aufgabe 2. Besetzungszahl Eigenzustände und Hermite Polynome (6 Punkte)

Erinnern Sie sich daran, dass die Eigenenergien des Hamiltonians eines quantenmechanischen harmonischen Oszillators $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + m\omega^2\hat{x}^2/2 = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2)$ gegeben sind durch $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$. Die zugehörigen Eigenvektoren heißen Besetzungszahl Eigenzustände und werden geschrieben als $|n\rangle$. Die entsprechenden orthonormalen Wellenfunktionen im Ortsraum $\psi_n(x) = \langle x|n\rangle$ sind gegeben durch

$$\psi_n(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}2^n n! x_{\text{ZPF}}} \right)^{1/2} e^{-x^2/4x_{\text{ZPF}}^2} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}x_{\text{ZPF}}}\right), \quad \text{wobei} \quad x_{\text{ZPF}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}.$$

1. (2 Punkte) Berechnen Sie die Standardabweichung von $\hat{x}$ für die Grundzustandswellenfunktion $\langle x|0\rangle = \psi_0(x)$ und zeigen Sie, dass das Ergebnis gerade x_{ZPF} entspricht (Sie dürfen bekannte Ergebnisse der Integralrechnung verwenden um explizite Rechnungen zu vermeiden). Dies ist der Grund, warum diese Konstante "zero point fluctuation" heißt: der Nullpunkt bezieht sich auf den Grundzustand (der $n = 0$ Zustand) und Fluktuation bezieht sich auf die Standardabweichung. Ihnen sollte auffallen, dass die Varianz von $\hat{x}$ für $|0\rangle$ dasselbe ist wie die für einen kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$ aus Aufgabe 1.5. Das liegt daran, dass der Grundzustand des quantenmechanischen harmonischen Oszillators gerade durch einen kohärenten Zustand ohne Verschiebung gegeben ist, d.h. $\alpha = 0$.
2. (2 Punkte) Die Hermite Polynome können mithilfe einer erzeugenden Funktion definiert werden:

$$e^{-s^2+2s\chi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} H_n(\chi).$$

Leiten Sie beide Seiten nach s und nach χ ab und fordern Sie, dass alle Terme von derselben Ordnung in s in der Summe gleich sein müssen, um folgende Beziehung zu erhalten:

- (a) $H_{n+1}(\chi) - 2\chi H_n(\chi) + 2nH_{n-1}(\chi) = 0$
- (b) $\frac{d}{d\chi} H_n(\chi) = 2nH_{n-1}(\chi).$

3. (2 Punkte) Für diesen Aufgabenteil können Sie der Einfachheit halber annehmen, dass $x_{\text{ZPF}} = 1/\sqrt{2}$. Wir wissen, dass die Besetzungszahl Eigenzustände orthonormal sind, d.h. $\langle m|n\rangle = \delta_{m,n}$. Dieses innere Produkt kann in Form eines Integrals ausgedrückt werden als

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_m^*(x) \psi_n(x) = \delta_{m,n}.$$

Indem wir die explizite Form der Wellenfunktionen benutzen, können wir folgendes Integral finden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{m,n}.$$

Arbeiten Sie in der Ortsbasis und zeigen Sie, dass der Erwartungswert von Orts- und Impulsoperator für einen beliebigen Besetzungszahl Eigenzustand verschwindet (Sie sollten oben gegebene Integrale benutzen anstatt die anderen Integrale explizit zu lösen).

Aufgabe 3. Pauli-Matrizen (5 Punkte)

Die Pauli-Matrizen sind definiert über

$$\sigma_x = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_z = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Später in der Vorlesung lernen wir, dass die Pauli-Matrizen mit dem Spin der Elektronen verbunden sind. Für jetzt reicht es zu wissen, dass wir ein zwei-Level System beschreiben über die Operatoren

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} \hat{S}_x \\ \hat{S}_y \\ \hat{S}_z \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}. \quad (2)$$

1. (1 Punkt) Zunächst untersuchen wir die Eigenschaften der Pauli-Matrizen. Beweisen Sie die Formel

$$\sigma_j \sigma_k = \mathbb{1}_2 \delta_{jk} + i \epsilon_{jkl} \sigma_l \quad (3)$$

wobei $\mathbb{1}_2 = \text{diag}(1, 1)$. Leiten Sie daraus

$$\{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\mathbb{1}_2 \delta_{jk} \quad [\sigma_j, \sigma_k] = 2i \epsilon_{jkl} \sigma_l \quad (4)$$

her und zeigen Sie, dass $[\hat{S}_j, \hat{S}_k] = i\hbar \epsilon_{jkl} \hat{S}_l$ gilt. Die Operatoren $\hat{S}_i$ erfüllen eine sogenannte Drehimpulsalgebra.

2. (1 Punkt) Beweisen Sie für beliebige $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{C}^3$, dass

$$(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \mathbb{1}_2 + i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\sigma}. \quad (5)$$

3. (1 Punkt) Bestimmen Sie die normierten Eigenzustände/ Eigenvektoren und Eigenwerte der $\hat{S}_i$.
4. (1 Punkt) Bestimmen Sie $\vec{S}^2$ und zeigen Sie, dass die Eigenzustände von $\vec{S}_i$ auch Eigenzustände von $\vec{S}^2$ sind. Welche Eigenwerte besitzt $\vec{S}^2$?
5. (1 Punkt) Seien $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nun die Eigenzustände zu $\hat{S}_z$. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der Leiteroperatoren $\hat{S}_{\pm} = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$ und deren Wirkung auf $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$.