Moderne Theoretische Physik I

Grundlagen der Quantenmechanik

Blatt 8

Prof. A. Metelmann
S. Böhling, L. Orr, V. Stangier
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Abgabe bis: 23.06.2023, 14:00 Uhr

Das Übungsblatt wird in Gruppen von maximal 3 Personen bearbeitet. Die Abgabe erfolgt digital über ILIAS.

Aufgabe 1. Zweidimensionaler harmonischer Oszillator (4 Punkte)

Betrachten Sie den harmonischen Oszillator in zwei räumlichen Dimensionen gegeben durch den Hamiltonian

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} (\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2), \quad (1)$$

wobei Orts- und Impulsoperatoren die kanonische Kommutatorrelation $[\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}$ erfüllen.

- (1 Punkt) Wir definieren Erzeuger- und Vernichtoperatoren mit Hilfe der Orts- und Impulsoperatoren als

$$\hat{a}_j = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x}_j + \frac{i}{m\omega} \hat{p}_j \right). \quad (2)$$

Zeigen Sie, dass für diese Operatoren die Kommutatorrelation $[\hat{a}_j, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{jk}$ erfüllt ist.

- (1 Punkt) Zeigen Sie, dass sich mit $\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$ der Hamiltonoperator diagonalisieren lässt.
- (1 Punkte) Für dieses System von zwei harmonischen Oszillatoren können wir auch Besetzungszahleigenzustände definieren, die wir als $|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle = |n_1, n_2\rangle$ schreiben. Der Besetzungszahloperator $\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$ der beiden Oszillatoren wirkt folgendermaßen auf diese Eigenzustände:

$$\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 |n_1, n_2\rangle = n_1 |n_1, n_2\rangle, \quad \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 |n_1, n_2\rangle = n_2 |n_1, n_2\rangle. \quad (3)$$

Zeigen Sie, dass die Zustände $|n_1, n_2\rangle$ Eigenzustände des Hamiltonians sind. Was sind die dazugehörigen Eigenenergien?

- (1 Punkt) Ihnen sollte aufgefallen sein, dass mehrere Eigenzustände dieselbe Eigenenergie besitzen. Wenn diese Situation eintritt, sprechen wir von entarteten Energieniveaus. Der "Grad der Entartung" ist bestimmt durch die Anzahl der Eigenzustände mit derselben Eigenenergie. Wenn z.B. zwei Eigenzustände dieselbe Eigenenergie besitzen, ist der Grad der Entartung dieses Energielevels 2. Was ist der Grad der Entartung in dieser Aufgabe für ein beliebiges Energielevel n ?

Aufgabe 2. Koordinatenwechsel (6 Punkte)

Wir betrachten noch einmal den Hamiltonian eines zweidimensionalen Systems, aber hier mit einer zusätzlichen Kopplung zwischen den beiden harmonischen Oszillatoren

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} (\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2) + \frac{g}{2} (\hat{x}_1 - \hat{x}_2)^2 \quad \text{mit} \quad [\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}. \quad (4)$$

1. (2 Punkte) Durch einen Koordinatenwechsel kann man den Kopplungsterm im Potential verschwinden lassen. Das Potential kann dann geschrieben werden als

$$\hat{V} = \frac{1}{2}K_1\hat{X}_1^2 + \frac{1}{2}K_2\hat{X}_2^2. \quad (5)$$

Wählen Sie $\hat{X}_1 = \hat{x}_1 - \hat{x}_2$, finden Sie einen passenden Ausdruck für $\hat{X}_2$ in Abhängigkeit von $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$, sodass das Potential wie oben geschrieben werden kann (wir hätten $\hat{X}_1$ anders wählen können). Was sind die Werte für K_1 und K_2 ?

2. (2 Punkte) Definieren Sie die zugehörigen Impulsoperatoren $\hat{P}_1$ und $\hat{P}_2$, sodass die kanonischen Kommutatorrelationen $[\hat{X}_j, \hat{P}_k] = i\hbar\delta_{jk}$ erfüllt sind.
3. (2 Punkte) Zeigen Sie, dass wir mit diesen neu definierten Operatoren den ursprünglichen Hamiltonian in folgender Form schreiben können:

$$\hat{H} = \frac{1}{2M_1}\hat{P}_1^2 + \frac{1}{2M_2}\hat{P}_2^2 + \frac{1}{2}K_1\hat{X}_1^2 + \frac{1}{2}K_2\hat{X}_2^2. \quad (6)$$

Was sind die neuen Massen in dieser Basis, M_1 und M_2 ? Durch diesen Koordinatenwechsel kann das System als zwei ungekoppelte harmonische Oszillatoren gesehen werden, das nun (wie in Aufgabe 1) auf eine einfachere Weise gelöst werden kann.

Aufgabe 3. Anharmonischer Oszillator (10 Punkte)

In der Vorlesung haben wir den anharmonischen Oszillator bereits kennengelernt. In dieser Aufgabe können Sie Ihre neuen Kenntnisse zur nichtentarteten, stationären Störungstheorie anwenden. Hierfür betrachten wir eine Variation zu dem bekannten Problem, nämlich einen Oszillator mit einer Störung folgender Form

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} \quad \text{mit} \quad \hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \quad \text{und} \quad \hat{V} = -\lambda\hbar\omega\hat{x}^3, \quad (7)$$

wobei $\lambda > 0$ eine kleine, reelle, dimensionslose Zahl ist.

1. (1 Punkt) Skizzieren Sie das Potential des ungestörten harmonischen Oszillators sowie das durch die Störung modifizierte Potential als Funktion von x .
2. (1 Punkt) Benutzen Sie die Definition $\hat{x} = \sqrt{\frac{1}{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ und zeigen Sie, dass die Störung geschrieben werden kann als

$$\hat{V} = -\frac{\lambda\hbar\omega}{2^{3/2}}[\hat{a}^{\dagger 3} + \hat{a}^3 + 3\hat{n}\hat{a}^\dagger + 3(\hat{n} + 1)\hat{a}] \quad \text{mit} \quad \hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}. \quad (8)$$

3. (1 Punkte) Berechnen Sie in der Besetzungszahlbasis alle Matrixelemente $\langle n' | \hat{V} | n \rangle$.
4. (4 Punkte) Berechnen Sie die Energie für einen Zustand mit n Bosonen bis einschließlich 2. Ordnung in λ , d.h. wählen Sie $|\psi_n^{(0)}\rangle = |n\rangle$ und verwenden Sie das bekannte Ergebnis für die Energiekorrektur

$$E_n = E_n^{(0)} + \langle \psi_n^{(0)} | \hat{V} | \psi_n^{(0)} \rangle - \sum_{n' (n' \neq n)} \frac{|\langle \psi_{n'}^{(0)} | \hat{V} | \psi_n^{(0)} \rangle|^2}{E_{n'}^{(0)} - E_n^{(0)}} + \mathcal{O}(\lambda^3). \quad (9)$$

Zeigen Sie, dass das Ergebnis geschrieben werden kann als

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{15}{4}\lambda^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \hbar\omega - \frac{7}{16}\lambda^2\hbar\omega + \mathcal{O}(\lambda^3). \quad (10)$$

5. (2 Punkte) Berechnen Sie den Energieunterschied zwischen zwei benachbarten Niveaus $E_n - E_{n-1}$. Interpretieren Sie dieses Ergebnis. Welchen Effekt hat die Störung auf den Energieunterschied (im Vergleich zum harmonischen Oszillator)?

6. (1 Punkt) Berechnen Sie die Korrektur des Zustandsvektors in erster Ordnung

$$|\psi_n^{(1)}\rangle = - \sum_{n' (n' \neq n)} \frac{\langle \psi_{n'}^{(0)} | \hat{V} | \psi_n^{(0)} \rangle}{E_{n'}^{(0)} - E_n^{(0)}} |\psi_{n'}^{(0)}\rangle. \quad (11)$$