Moderne Theoretische Physik I
Grundlagen der Quantenmechanik

Blatt 8

Prof. A. Metelmann
S. Böhling, L. Orr, V. Stangier
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Abgabe bis: 23.06.2023, 14:00 Uhr

Das Übungsblatt wird in Gruppen von maximal 3 Personen bearbeitet. Die Abgabe erfolgt digital über ILIAS.

Aufgabe 1. Zweidimensionaler harmonischer Oszillator (4 Punkte)

Betrachten Sie den harmonischen Oszillator in zwei räumlichen Dimensionen gegeben durch den Hamiltonian

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2\right) , \tag{1}$$

wobei Orts- und Impulsoperatoren die kanonische Kommutatorrelation $[\hat{x}_j\,, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}$ erfüllen.

1. (1 Punkt) Wir definieren Erzeuger- und Vernichteroperatoren mit Hilfe der Orts- und Impulsoperatoren als

$$\hat{a}_j = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x}_j + \frac{i}{m\omega}\hat{p}_j\right) . \tag{2}$$

   Zeigen Sie, dass für diese Operatoren die Kommutatorrelation $\left[\hat{a}_j\,, \hat{a}_j^\dagger\right] = \delta_{jk}$ erfüllt ist.

2. (1 Punkt) Zeigen Sie, dass sich mit $\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j$ der Hamiltonoperator diagonalisieren lässt.

3. (1 Punkte) Für dieses System von zwei harmonischen Oszillatoren können wir auch Besetzungszahleigenzustände definieren, die wir als $|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle = |n_1, n_2\rangle$ schreiben. Der Besetzungszahloperator $\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j$ der beiden Oszillatoren wirkt folgendermaßen auf diese Eigenzustände:

$$\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 |n_1, n_2\rangle = n_1 |n_1, n_2\rangle , \qquad \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 |n_1, n_2\rangle = n_2 |n_1, n_2\rangle . \tag{3}$$

   Zeigen Sie, dass die Zustände $|n_1, n_2\rangle$ Eigenzustände des Hamiltonians sind. Was sind die dazugehörigen Eigenenergien?

4. (1 Punkt) Ihnen sollte aufgefallen sein, dass mehrere Eigenzustände dieseble Eigenenergie besitzen. Wenn diese Situation eintritt, sprechen wir von entarteten Energieniveaus. Der "Grad der Entartung" ist bestimmt durch die Anzahl der Eigenzustände mit derselben Eigenenergie. Wenn z.B. zwei Eigenzustände dieselbe Eigenenergie besitzen, ist der Grad der Entartung dieses Energielevels 2. Was ist der Grad der Entartung in dieser Aufgabe für ein beliebiges Energielevel n?

Lösung Aufgabe 1.

1. Mithilfe der Kommuitatorrelation $[\hat{x}_i\,, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$ folgt (1 Punkt):

$$\begin{aligned}\left[\hat{a}_i\,, \hat{a}_j^\dagger\right] &= \frac{m\omega}{2\hbar}\left[\hat{x}_i + \frac{i}{m\omega}\hat{p}_i\,, \hat{x}_j - \frac{i}{m\omega}\hat{p}_j\right] \\ &= \frac{m\omega}{2\hbar}\left(\left[\frac{i}{m\omega}\hat{p}_i\,, \hat{x}_j\right] - \left[\hat{x}_i\,, \frac{i}{m\omega}\hat{p}_j\right]\right) \\ &= \frac{m\omega}{\hbar}\frac{i}{m\omega}\left[\hat{p}_i\,, \hat{x}_i\right]\delta_{ij} = \delta_{ij}\end{aligned}$$

2. Durch Einsetzen in $\hat{H}$ findet man (1 Punkt):

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + 1\right)$$

3. Using this expression for H we get (1 Punkt):

$$\hat{H}\left|n_1, n_2\right\rangle = \hbar\omega\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + 1\right)\left|n_1, n_2\right\rangle = \hbar\omega(n_1 + n_2 + 1)\left|n_1, n_2\right\rangle .$$

   The 2d number states $|n_1, n_2\rangle$ are therefore eigenstates of the Hamiltonian with associated eigenenergy:

$$E_{(n_1,n_2)} = \hbar\omega(n_1 + n_2 + 1).$$

4. (1 Punkt) States with $n_1 + n_2 = N$ where $N = 1, 2, 3, \ldots$ are degenerate. It can be argued that for any N there are $N + 1$ combinations of (n_1, n_2) that sum to $n_1 + n_2 = N$. So the level of degeneracy for an eigenenergy $E_N = \hbar\omega(N + 1)$ is $N + 1$. As an example, consider the states $|0, 2\rangle$, $|2, 0\rangle$, and $|1, 1\rangle$; all have identical eigenenergies $E_{(0,2)} = E_{(2,0)} = E_{(1,1)}$, so the level of degeneracy is 3.

Aufgabe 2. Koordinatenwechsel (6 Punkte)

Wir betrachten noch einmal den Hamiltonian eines zweidimensionalen Systems, aber hier mit einer zusätzlichen Kopplung zwischen den beiden harmonischen Oszillatoren

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2\right) + \frac{g}{2}(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)^2 \quad \text{mit} \quad [\hat{x}_j\,, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}\,. \tag{4}$$

1. (2 Punkte) Durch einen Koordinatenwechsel kann man den Kopplungsterm im Potential verschwinden lassen. Das Potential kann dann geschrieben werden als

$$\hat{V} = \frac{1}{2}K_1\hat{X}_1^2 + \frac{1}{2}K_2\hat{X}_2^2. \tag{5}$$

   Finden Sie die passenden Ausdrücke für $\hat{X}_1$ und $\hat{X}_2$ in Abhängigkeit der ursprünglichen Ortsoperatoren $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$ (dies sollten einfache Linearkombinationen sein). Was sind die Werte für K_1 und K_2?

2. (2 Punkte) Definieren Sie die zugehörigen Impulsoperatoren $\hat{P}_1$ und $\hat{P}_2$, sodass die kanonischen Kommutatorrelationen $[\hat{X}_j, \hat{P}_k] = i\hbar\delta_{jk}$ erfüllt sind.

3. (2 Punkte) Zeigen Sie, dass wir mit diesen neu definierten Operatoren den ursprünglichen Hamiltonian in folgender Form schreiben können:

$$\hat{H} = \frac{1}{2M_1}\hat{P}_1^2 + \frac{1}{2M_2}\hat{P}_2^2 + \frac{1}{2}K_1\hat{X}_1^2 + \frac{1}{2}K_2\hat{X}_2^2. \tag{6}$$

   Was sind die neuen Massen in dieser Basis, M_1 und M_2? Durch diesen Koordinatenwechsel kann das System als zwei ungekoppelte harmonische Oszillatoren gesehen werden, das nun (wie in Aufgabe 1) auf eine einfachere Weise gelöst werden kann.

Lösung Aufgabe 2.

1. For this choice $\hat{X}_1 = \hat{x}_1 - \hat{x}_2$ we need to solve

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ q & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{q+r} \begin{pmatrix} r & 1 \\ -q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \end{pmatrix}$$

Substituting these expressions into the original potential we obtain

$$\begin{aligned} \hat{V} &= \frac{m\omega^2}{2} \frac{1}{(q+r)^2} \left((r\hat{X}_1 + \hat{X}_2)^2 + (-q\hat{X}_1 + \hat{X}_2)^2 \right) + \frac{g}{2} \hat{X}_1^2 \\ &= \frac{m\omega^2}{2} \frac{1}{(q+r)^2} \left((r^2 + q^2)\hat{X}_1^2 + 2\hat{X}_2^2 + 2(r-q)\hat{X}_1\hat{X}_2 \right) + \frac{g}{2} \hat{X}_1^2 \end{aligned}$$

and must therefore choose $q = r$ to make the coupling between $\hat{X}_1$ and $\hat{X}_2$ disappear. Therefore we have the following expression for $\hat{X}_2$:

$$\hat{X}_2 = r(\hat{x}_1 + \hat{x}_2).$$

We can therefore simply the potential term and get the following values for K_1 and K_2:

$$\frac{1}{2}K_1\hat{X}_1^2 + \frac{1}{2}K_2\hat{X}_2^2 = \frac{1}{2}(g + \frac{m\omega^2}{2})\hat{X}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m\omega^2}{2r^2}\right)\hat{X}_2^2 \quad \rightarrow \quad K_1 = g + \frac{m\omega^2}{2}\,,\; K_2 = \frac{m\omega^2}{2r^2}.$$

2. We can write the new momentum operators as functions of the original momentum operators as follows

$$\hat{P}_1 = y_{11}\hat{p}_1 + y_{12}\hat{p}_2 \qquad \hat{P}_2 = y_{21}\hat{p}_1 + y_{22}\hat{p}_2.$$

We can determine these coefficients by demanding that the canonical commutation relations be obeyed, $[\hat{X}_j, \hat{P}_k] = i\hbar\delta_{jk}$. It is easier to start with the commutators for $j \neq k$:

$$\begin{aligned} [\hat{X}_1, \hat{P}_2] &= y_{21}[\hat{x}_1, \hat{p}_1] - y_{22}[\hat{x}_2, \hat{p}_2] = i\hbar(y_{21} - y_{22}) = 0 \rightarrow y_{21} = y_{22} \\ [\hat{X}_2, \hat{P}_1] &= ry_{11}[\hat{x}_1, \hat{p}_1] + ry_{12}[\hat{x}_2, \hat{p}_2] = i\hbar r(y_{11} + y_{12}) = 0 \rightarrow y_{11} = -y_{12}. \end{aligned}$$

So we have $\hat{P}_1 = y_{11}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$ and $\hat{P}_2 = y_{22}(\hat{p}_1 + \hat{p}_2)$. We can now work out the other two commutators

$$\begin{aligned} [\hat{X}_1, \hat{P}_1] &= y_{11}[\hat{x}_1, \hat{p}_1] + y_{11}[\hat{x}_2, \hat{p}_2] = 2i\hbar y_{11} = \imath\hbar \rightarrow y_{11} = \frac{1}{2} \\ [\hat{X}_2, \hat{P}_2] &= ry_{22}[\hat{x}_1, \hat{p}_1] + ry_{22}[\hat{x}_2, \hat{p}_2] = 2i\hbar r y_{22} = 0 \rightarrow y_{22} = \frac{1}{2r}. \end{aligned}$$

We then have the following expressions for the conjugate momenta:

$$\hat{P}_1 = \frac{1}{2}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \qquad \hat{P}_2 = \frac{1}{2r}(\hat{p}_1 + \hat{p}_2).$$

3. Here we just use the previous expressions to obtain expressions for $\hat{p}_1$ and $\hat{p}_2$:

$$\begin{pmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{P}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1/r & 1/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r \\ -1 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{P}_2 \end{pmatrix}$$

We have already worked out the potential component earlier in the problem, so we just need to substitute these expressions for the momentum into the kinetic component of the original Hamiltonian and simplify

$$\hat{T} = \frac{1}{2m}(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2) = \frac{1}{2m}(2\hat{P}_1^2 + 2r\hat{P}_2^2) = \frac{1}{2M_1}\hat{P}_1^2 + \frac{1}{2M_2}\hat{P}_2^2 \quad \rightarrow \quad M_1 = \frac{m}{2}\,,\; M_2 = \frac{m}{2r}.$$

In the new "normal-mode" coordinate system the Hamiltonian is then written

$$\hat{H} = \frac{1}{m}\hat{P}_1^2 + \frac{r}{m}\hat{P}_2^2 + \frac{1}{2}(g + m\omega^2 r)\hat{X}_1^2 + \frac{m\omega^2}{2r}\hat{X}_2^2$$

where the oscillators are decoupled.

Aufgabe 3. Anharmonischer Oszillator (10 Punkte)

In der Vorlesung haben wir den anharmonischen Oszillator bereits kennengelernt. In dieser Aufgabe können Sie Ihre neuen Kenntnisse zur nichtentarteten, stationären Störungstheorie anwenden. Hierfür betrachten wir eine Variation zu dem bekannten Problem, nämlich einen Oszillator mit einer Störung folgender Form

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} \quad \text{mit} \quad \hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 \quad \text{und} \quad \hat{V} = -\lambda\hbar\omega\hat{x}^3 \,, \tag{7}$$

wobei $\lambda > 0$ eine kleine, reelle, dimensionslose Zahl ist.

1. (1 Punkt) Skizzieren Sie das Potential des ungestörten harmonischen Oszillators sowie das durch die Störung modifizierte Potential als Funktion von x.
2. (1 Punkt) Benutzen Sie die Definition $\hat{x} = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right)$ und zeigen Sie, dass die Störung geschrieben werden kann als
$$\hat{V} = -\frac{\lambda\hbar\omega}{2^{3/2}} \left[\hat{a}^{\dagger 3} + \hat{a}^3 + 3\hat{n}\hat{a}^\dagger + 3(\hat{n}+1)\hat{a}\right] \quad \text{mit} \quad \hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a} \,. \tag{8}$$
3. (1 Punkte) Berechnen Sie in der Besetzungszahlbasis alle Matrixelemente $\langle n'|\, \hat{V}\, |n\rangle$.
4. (4 Punkte) Berechnen Sie die Energie für einen Zustand mit n Bosonen bis einschließlich 2. Ordnung in λ, d.h. wählen Sie $\left|\psi_n^{(0)}\right\rangle = |n\rangle$ und verwenden Sie das bekannte Ergebnis für die Energiekorrektur
$$E_n = E_n^{(0)} + \left\langle \psi_n^{(0)} \middle| \hat{V} \middle| \psi_n^{(0)} \right\rangle - \sum_{n'(n'\neq n)} \frac{\left|\left\langle \psi_{n'}^{(0)} \middle| \hat{V} \middle| \psi_n^{(0)} \right\rangle\right|^2}{E_{n'}^{(0)} - E_n^{(0)}} + \mathcal{O}(\lambda^3) \,. \tag{9}$$
Zeigen Sie, dass das Ergebnis geschrieben werden kann als
$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{15}{4}\lambda^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \hbar\omega - \frac{7}{16}\lambda^2\hbar\omega + \mathcal{O}(\lambda^3) \,. \tag{10}$$
5. (2 Punkte) Berechnen Sie den Energieunterschied zwischen zwei benachbarten Niveaus $E_n - E_{n-1}$. Interpretieren Sie dieses Ergebnis. Welchen Effekt hat die Störung auf den Energieunterschied (im Vergleich zum harmonischen Oszillator)?
6. (1 Punkt) Berechnen Sie die Korrektur des Zustandsvektors in erster Ordnung
$$\left|\psi_n^{(1)}\right\rangle = -\sum_{n'(n'\neq n)} \frac{\left\langle \psi_{n'}^{(0)} \middle| \hat{V} \middle| \psi_n^{(0)} \right\rangle}{E_{n'}^{(0)} - E_n^{(0)}} \left|\psi_{n'}^{(0)}\right\rangle \,. \tag{11}$$

Lösung Aufgabe 3. Anharmonischer Oszillator (10 Punkte)

1. Skizze in Abbildung 1 ($x_{A,B}$, A, b, E müssen nicht eingezeichnet werden): gestrichelte Linie ist ungestört, durchgezogene Linie mit Störung. (1 Punkt)
2. Durch Ausmultiplizieren von $\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right)^3$ und Kommutatorrelation $\left[\hat{a}\,, \hat{a}^\dagger\right] = 1$ (1 Punkt):
$$\hat{V} = -\frac{\lambda\hbar\omega}{2^{3/2}} \left[\hat{a}^{\dagger 3} + \hat{a}^3 + 3\hat{n}\hat{a}^\dagger + 3(\hat{n}+1)\hat{a}\right]$$
3. Wir benutzen die Darstellung von $\hat{V}$ aus vorheriger Teilaufgabe. Mit $\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$ und $\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ Operatoren nacheinander auf $|n\rangle$ wirken lassen:
$$\begin{aligned}
\langle n'|\, \hat{a}^{\dagger 3}\, |n\rangle &= \langle n'|\, \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}\, |n+3\rangle = \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}\delta_{n',n+3} \,, \\
\langle n'|\, \hat{a}^3\, |n\rangle &= \sqrt{n(n-1)(n-2)}\delta_{n',n-3} \,, \\
\langle n'|\, \hat{n}\hat{a}^\dagger\, |n\rangle &= (n+1)\sqrt{(n+1)}\delta_{n',n+1} = (n+1)^{3/2}\delta_{n',n+1} \,, \\
\langle n'|\, (\hat{n}+1)\hat{a}\, |n\rangle &= (n-1+1)\sqrt{n}\delta_{n',n-1} = n^{3/2}\delta_{n',n-1}
\end{aligned}$$

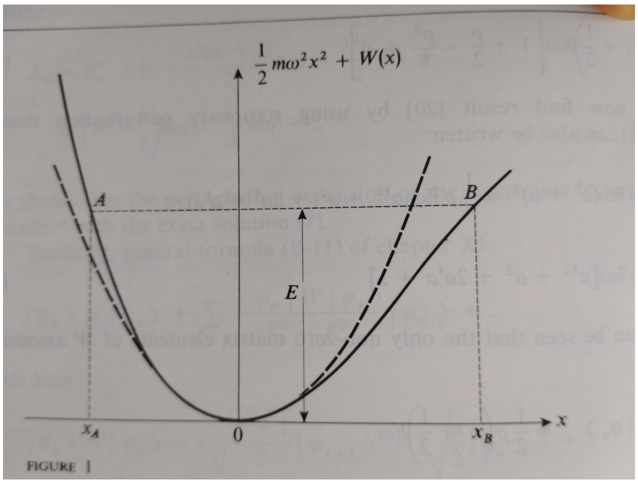

Figure 1: Skizze zu Aufg. 3.1.

Wegen der Kronecker Deltas gibt es nur vier Matrixelemente, die nicht Null werden (1 Punkte):

$$\begin{aligned}
\langle n+3|\,\hat{V}\,|n\rangle &= -\frac{\lambda\hbar\omega}{\sqrt{8}}\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
\langle n-3|\,\hat{V}\,|n\rangle &= -\frac{\lambda\hbar\omega}{\sqrt{8}}\sqrt{n(n-1)(n-2)} \\
\langle n+1|\,\hat{V}\,|n\rangle &= -3\frac{\lambda\hbar\omega}{\sqrt{8}}(n+1)^{3/2} \\
\langle n-1|\,\hat{V}\,|n\rangle &= -3\frac{\lambda\hbar\omega}{\sqrt{8}}n^{3/2}\,.
\end{aligned}$$

4. Die nullte Ordnung ist die Energie des ungestörten harmonischen Oszillators (0.5 Punkte):

$$E_n^{(0)} = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

Die Energiekorrektur erster Ordnung in λ verschwindet, da die Diagonalelemente von $\hat{V}$ Null sind, wie wir in der vorherigen Teilaufgabe gesehen haben (0.5 Punkte):

$$E_n^{(1)} = \left\langle \psi_n^{(0)} \middle| \hat{V} \middle| \psi_n^{(0)} \right\rangle = 0$$

Für die Energiekorrektur 2. Ordnung in λ benutzen wir die vier Matrixelemente aus der vorherigen Aufgabe (2 Punkte):

$$\begin{aligned}
&-\sum_{n'\,(n'\neq n)} \frac{\left|\left\langle \psi_{n'}^{(0)} \middle| \hat{V} \middle| \psi_n^{(0)} \right\rangle\right|^2}{E_{n'}^{(0)} - E_n^{(0)}} = -\sum_{n'\,(n'\neq n)} \frac{\left|\langle n'|\,\hat{V}\,|n\rangle\right|^2}{\hbar\omega\,(n'-n)} \\
&= -\left(\frac{\left|\langle n+3|\,\hat{V}\,|n\rangle\right|^2}{\hbar\omega\,(n+3-n)} + \frac{\left|\langle n-3|\,\hat{V}\,|n\rangle\right|^2}{\hbar\omega\,(n-3-n)} + \frac{\left|\langle n+1|\,\hat{V}\,|n\rangle\right|^2}{\hbar\omega\,(n+1-n)} + \frac{\left|\langle n-1|\,\hat{V}\,|n\rangle\right|^2}{\hbar\omega\,(n-1-n)}\right) \\
&= -\frac{\lambda^2\hbar\omega}{8}\left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} + \frac{n(n-1)(n-2)}{-3} + 9\frac{(n+1)^3}{1} + 9\frac{n^3}{-1}\right) \\
&= -\frac{\lambda^2\hbar\omega}{8}\left(\frac{9n^2+9n+6}{3} + 9\frac{3n^2+3n+1}{1}\right) = -\frac{\lambda^2\hbar\omega}{8}\left(30n^2+30n+11\right)
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir so (0.5 Punkte)

$$
\begin{aligned}
E_n &= E_n^{(0)} + \left\langle \psi_n^{(0)} \middle| \hat{V} \middle| \psi_n^{(0)} \right\rangle - \sum_{n'(n' \neq n)} \frac{\left| \left\langle \psi_{n'}^{(0)} \middle| \hat{V} \middle| \psi_n^{(0)} \right\rangle \right|^2}{E_{n'}^{(0)} - E_n^{(0)}} + \mathcal{O}(\lambda^3) \\
&= \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\lambda^2 \hbar\omega}{8} \left(30n^2 + 30n + 11 \right) + \mathcal{O}(\lambda^3)
\end{aligned}
$$

Wir zeigen, dass dies dem gegebenen Ergebnis entspricht, indem wir die gewünschte Lösung auf die obige Form bringen (0.5 Punkte):

$$
\begin{aligned}
E_n &= \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega - \frac{15}{4} \lambda^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \hbar\omega - \frac{7}{16} \lambda^2 \hbar\omega + \mathcal{O}(\lambda^3) \\
&= \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega - \frac{\lambda^2 \hbar\omega}{8} \left[30 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{2} \right] + \mathcal{O}(\lambda^3) \\
&= \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega - \frac{\lambda^2 \hbar\omega}{8} \left[30 \left(n^2 + n + \frac{1}{4} \right) + \frac{7}{2} \right] + \mathcal{O}(\lambda^3) \\
&= \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega - \frac{\lambda^2 \hbar\omega}{8} \left[30n^2 + 30n + 11 \right] + \mathcal{O}(\lambda^3)
\end{aligned}
$$

5. Für den Energieunterschied zwischen zwei benachbarten Niveaus finden wir (1 Punkt)

$$
\begin{aligned}
E_n - E_{n-1} &= \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) - \hbar\omega \left(n - 1 + \frac{1}{2} \right) \\
&\quad - \frac{\lambda^2 \hbar\omega}{8} \left[30n^2 + 30n + 11 - \left(30(n-1)^2 + 30(n-1) + 11 \right) \right] + \mathcal{O}(\lambda^3) \\
&= \hbar\omega - \frac{\lambda^2 \hbar\omega}{8} 30 \left[n^2 + n - \left((n-1)^2 + (n-1) \right) \right] + \mathcal{O}(\lambda^3) \\
&= \hbar\omega - \frac{\lambda^2 \hbar\omega}{8} 30 \left[n^2 + n - \left(n^2 - 2n + 1 + n - 1 \right) \right] + \mathcal{O}(\lambda^3) = \hbar\omega - \frac{\lambda^2 \hbar\omega}{8} 30 \cdot 2n + \mathcal{O}(\lambda^3) \\
&= \hbar\omega \left(1 + \frac{15}{2} n \lambda^2 \right) + \mathcal{O}(\lambda^3)
\end{aligned}
$$

Interpretation (1 Punkt): Das bedeutet, dass die Energieabstände zwischen zwei Niveaus im Gegensatz zum harmonischen Oszillator nun nicht mehr unabhängig von n sind. Sie sind nicht mehr equidistant sondern liegen näher beieinander für wachsende n.

6. Wir nutzen die Ergebnisse aus den vorigen Aufgabenteilen (1 Punkt):

$$
\begin{aligned}
\left| \psi_n^{(1)} \right\rangle &= - \sum_{n'(n' \neq n)} \frac{\left\langle \psi_{n'}^{(0)} \middle| \hat{V} \middle| \psi_n^{(0)} \right\rangle}{E_{n'}^{(0)} - E_n^{(0)}} \left| \psi_{n'}^{(0)} \right\rangle \\
&= 3\lambda \left(\frac{n+1}{2} \right)^{3/2} |n+1\rangle - 3\lambda \left(\frac{n}{2} \right)^{3/2} |n-1\rangle + \frac{\lambda}{3} \left(\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{8} \right)^{1/2} |n+3\rangle \\
&\quad - \frac{\lambda}{3} \left(\frac{n(n-2)(n-1)}{8} \right)^{1/2} |n-3\rangle \ .
\end{aligned}
$$