Moderne Theoretische Physik I
Grundlagen der Quantenmechanik

Blatt 9

Prof. A. Metelmann
S. Böhling, L. Orr, V. Stangier
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Abgabe bis: 30.06.2023, 14:00 Uhr

Das Übungsblatt wird in Gruppen von maximal 3 Personen bearbeitet. Die Abgabe erfolgt digital über ILIAS.

Aufgabe 1. Teilchen auf dem Ring (8 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir ein Teilchen mit Masse m, das sich nur auf einem Ring mit Radius r bewegen kann. Dieses Problem ist ähnlich zum Teilchen im Potentialtopf, das Sie aus einer früheren Aufgabe kennen, wobei die Wellenfunktion in dem aktuellen Problem 2π-periodisch sein muss. Die Schrödinger Gleichung und das Eigensystem in der Drehimpulsbasis lauten:

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\psi(\theta) = E\psi(\theta),\, \psi(\theta) = \psi(\theta + 2\pi) \quad \Rightarrow \quad \psi_j(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}e^{ij\theta},\, E_j = \frac{j^2\hbar^2}{2mr^2},\ \text{wobei } j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Es kann gezeigt werden, dass die Eigenfunktionen $\psi_j(\theta)$ eine orthonormale Basis bilden. Beachten Sie auch, dass die angeregten Zustände $|j| \geq 1$ zweifach entartet sind für identische Werte $|j|$, da $E_{+j} = E_{-j}$. Diese Zustände sind eigentlich die Eigenzustände des Operators $-i\hbar\frac{\partial}{\partial\theta}$, der als Drehimpuls Operator für das Teilchen auf dem Ring wirkt. Wir hätten stattdessen auch folgendes Problem lösen können, indem wir die Eigenvektoren $|j\rangle$ und folgende Operatoren benutzen:

$$\hat{J}\,|j\rangle = \hbar j\,|j\rangle \qquad \hat{U}\,|j\rangle = |j+1\rangle \qquad \hat{U}^\dagger\,|j\rangle = |j-1\rangle \qquad \langle j'|j\rangle = \delta_{j'j}.$$

Hier bezeichnet $\hat{J}$ den Drehimpulsoperator und $\hat{U}$ einen unitären Operator. In der Ortsbasis kann $\hat{U}$ als komplexes Exponential $e^{i\theta}$ geschrieben werden und wir können sehen, dass $e^{i\theta}\psi_j(\theta) = \psi_{j+1}(\theta)$. Wir können $\hat{U}$ benutzen, um einen "Kosinusoperator" $\cos\hat{\theta} = (\hat{U} + \hat{U}^\dagger)/2$ zu definieren. In diesem Problem betrachten wir das System bestehend aus folgendem ungestörten Hamiltonian $\hat{H}$ und einem Störpotential $\hat{V}$:

$$\hat{H} = \frac{1}{2mr^2}\hat{J}^2,\ \text{wobei}\ \langle j'|\hat{H}|j\rangle = \frac{j^2\hbar^2}{2mr^2}\delta_{j'j} \qquad \hat{V} = \lambda\hbar(\cos\hat{\theta})^2. \tag{1}$$

1. (1 Punkte) Drücken Sie das Potential durch den Operator $\hat{U}$ aus und nutzen Sie die angegebenen Relationen um ein beliebiges Matrixelement in der Basis der Drehimpulseigenzustände $\langle j'|\hat{V}|j\rangle$ auszuwerten.

2. (2 Punkte) Berechnen Sie die Energiekorrektur erster und zweiter Ordnung für den Grundzustand des Systems $j = 0$, $E_0^{(1)}$ und $E_0^{(2)}$. Berechnen Sie die Korrektur des Grundzustands $|\psi_0^{(0)}\rangle = |0\rangle$ bis zweite Ordnung, $|\psi_0^{(1)}\rangle$ und $|\psi_0^{(2)}\rangle$.

3. (3 Punkte) Wir bezeichnen mit $E_1^{(0)} = E_1$ die ungestörte Eigenenergie des Zustands mit $j = \pm 1$. Benutzen Sie entartete Störungstheorie um die Korrektur erster Ordnung der Energieniveaus zu berechnen, d.h. berechnen Sie $E_{1x}^{(1)}$, $x = 1, 2$. Berechnen Sie auch die korrekten Zustände nullter Ordnung $|\psi_{1x}^{(0)}\rangle$, $x = 1, 2$.

4. (2 Punkte) Zeigen Sie für die $|j| \geq 2$ Zustände, dass die Energiekorrektur erster Ordnung $E_{|j|x}^{(1)}$, $x = 1, 2$ die Entartung nicht aufhebt.

Aufgabe 2. Zeitentwicklung und Messung (6 Punkte)

Wir erinnern uns an die Pauli-Matritzen, die wir auf Übungszettel 7 in Gl. (1) definiert haben. Wie Sie in der Vorlesung gelernt haben, kann der Hamiltonian Operators eines 2-Niveau Systems ausgedrückt werden als

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z \,. \tag{2}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich dieses System in einem beliebigen Zustand

$$|\psi(0)\rangle = \alpha\,|g\rangle + \beta\,|e\rangle \;, \quad \text{wobei} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\,. \tag{3}$$

1. (2 Punkte) Bestimmen Sie die Koeffizienten α und β in $|\psi(t)\rangle$ für $t > 0$ und berechnen Sie den Erwartungswert von $\hat{\sigma}_y$ für diesen Zustand.
2. (2 Punkte) Wechseln Sie ins Heisenbergbild und bestimmen Sie $\hat{\sigma}_y^H(t)$. Berechnen Sie $\langle\psi(0)|\,\hat{\sigma}_y^H(t)\,|\psi(0)\rangle$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem vorigen Aufgabenteil.
3. (2 Punkte) Wir nehmen an, dass sich das System zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand Gl. 3 befindet. Nehmen Sie an, Sie messen am Zeitpunkt $t = \tau_1$ die Observable $\hat{\sigma}_x$. Was sind die möglichen Messwerte und was die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten?

Aufgabe 3. Getriebenes 2-Niveau System (6 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachen wir ein 2-Niveau System mit einem Grundzustand $|1\rangle$ und einem angeregten Zustand $|2\rangle$, das von einem externen Laser mit einer Frequenz ω und einer reellen Kopplungsamplitude V getrieben wird. Der Hamiltonian für dieses System ist gegeben als

$$\hat{H} = \omega_1\,|1\rangle\,\langle 1| + \omega_2\,|2\rangle\,\langle 2| + V\cos\left(\omega t + \phi\right)\left[|1\rangle\,\langle 2| + |2\rangle\,\langle 1|\right] \,. \tag{4}$$

1. (1 Punkt) Schreiben Sie die Wellenfunktion als Superposition eines Grundzustandes $|\psi(t)\rangle = b_1(t)\,|1\rangle + b_2(t)\,|2\rangle$, wobei die Zeitabhängigkeit in den Koeffizienten $b_j(t)$ steckt. Zeigen Sie mit Hilfe der Schrödinger Gleichung, dass folgende Differentialgleichungen für die Koeffizienten erfüllt sein müssen (verwenden Sie $\hbar = 1$):
$$i\frac{\mathrm{d}b_1}{\mathrm{d}t} = \omega_1 b_1 + V\cos(\omega t + \phi) b_2 \tag{5}$$
$$i\frac{\mathrm{d}b_2}{\mathrm{d}t} = \omega_2 b_2 + V\cos(\omega t + \phi) b_1 \tag{6}$$
2. (1 Punkt) Zeigen Sie, dass sich die Bewegungsgleichungen umschreiben lassen, als
$$i\frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}t} = \frac{V}{2}c_2 \tag{7}$$
$$i\frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}t} = \frac{V}{2}c_1 + \left(\omega_2 - \omega\right)c_2 \tag{8}$$
wobei Sie annehmen können, dass $b_1 = c_1$, $b_2 = c_2 e^{i\omega t}$ und $\omega_1 = 0$, sowie dass die Phasenverschiebung verschwindet, d.h. $\phi = 0$. Arbeiten Sie im Rahmen der sogenannten Rotating Wave Approximation, das heißt nehmen Sie an, dass schnell oszillierende Terme (d.h. $\propto e^{\pm 2i\omega t}$ oder höher) vernachlässigt werden können.
3. (2 Punkte) Betrachten Sie nun den Fall eines resonanten Drives, d.h. $\omega = \omega_2$. Lösen Sie die gekoppelten Differentialgleichungen, indem Sie Gl. 8 ableiten und Gl. 7 einsetzen. Lösen Sie die Gleichung, die Sie erhalten, mit einem Sinus-Ansatz.
4. (1 Punkt) Stellen Sie die Besetzung der beiden Zustände (d.h. das Betragsquadrat von c_j) als Funktion der Zeit graphisch dar und bestimmen Sie die Frequenz der Oszillation, indem Sie das Betragsquadrat explizit berechnen.
5. (1 Punkt) Was ist die Besetzung des 2-Niveau Systems, das sich anfangs im Grundzustand befindet und dann einem π-Puls ausgesetzt wird? Damit meinen wir eine Anregung, die zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltet wird und zur Zeit $t = \pi/V$ wieder ausgeschaltet wird. Stellen Sie die Zeitentwicklung dieses Systems graphisch dar (wir vernachlässigen hierbei spontane Emission).