# Moderne Theoretische Physik I
# Grundlagen der Quantenmechanik

**Blatt 9**

Prof. A. Metelmann
S. Böhling, L. Orr, V. Stangier
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
**Abgabe bis:** 30.06.2023, 14:00 Uhr

**Das Übungsblatt wird in Gruppen von maximal 3 Personen bearbeitet. Die Abgabe erfolgt digital über ILIAS.**

## Aufgabe 1. Teilchen auf dem Ring (8 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir ein Teilchen mit Masse $m$, das sich nur auf einem Ring mit Radius $r$ bewegen kann. Dieses Problem ist ähnlich zum Teilchen im Potentialtopf, das Sie aus einer früheren Aufgabe kennen, wobei die Wellenfunktion in dem aktuellen Problem $2\pi$-periodisch sein muss. Die Schrödinger Gleichung und das Eigensystem in der Drehimpulsbasis lauten:

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\psi(\theta) = E\psi(\theta),\, \psi(\theta) = \psi(\theta+2\pi) \quad \Rightarrow \quad \psi_j(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}e^{ij\theta},\, E_j = \frac{j^2\hbar^2}{2mr^2},\ \text{wobei } j = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

Es kann gezeigt werden, dass die Eigenfunktionen $\psi_j(\theta)$ eine orthonormale Basis bilden. Beachten Sie auch, dass die angeregten Zustände $|j| \geq 1$ zweifach entartet sind für identische Werte $|j|$, da $E_{+j} = E_{-j}$. Diese Zustände sind eigentlich die Eigenzustände des Operators $-i\hbar\frac{\partial}{\partial\theta}$, der als Drehimpuls Operator für das Teilchen auf dem Ring wirkt. Wir hätten stattdessen auch folgendes Problem lösen können, indem wir die Eigenvektoren $|j\rangle$ und folgende Operatoren benutzen:

$$\hat{J}\,|j\rangle = \hbar j\,|j\rangle \qquad \hat{U}\,|j\rangle = |j+1\rangle \qquad \hat{U}^\dagger\,|j\rangle = |j-1\rangle \qquad \langle j'|j\rangle = \delta_{j'j}.$$

Hier bezeichnet $\hat{J}$ den Drehimpulsoperator und $\hat{U}$ einen unitären Operator. In der Ortsbasis kann $\hat{U}$ als komplexes Exponential $e^{i\theta}$ geschrieben werden und wir können sehen, dass $e^{i\theta}\psi_j(\theta) = \psi_{j+1}(\theta)$. Wir können $\hat{U}$ benutzen, um einen "Kosinusoperator" $\cos\hat{\theta} = (\hat{U}+\hat{U}^\dagger)/2$ zu definieren. In diesem Problem betrachten wir das System bestehend aus folgendem ungestörten Hamiltonian $\hat{H}$ und einem Störpotential $\hat{V}$:

$$\hat{H} = \frac{1}{2mr^2}\hat{J}^2,\ \text{wobei } \langle j'|\hat{H}|j\rangle = \frac{j^2\hbar^2}{2mr^2}\delta_{j'j} \qquad \hat{V} = \lambda\hbar(\cos\hat{\theta})^2. \tag{1}$$

1. (1 Punkte) Drücken Sie das Potential durch den Operator $\hat{U}$ aus und nutzen Sie die angegebenen Relationen um ein beliebiges Matrixelement in der Basis der Drehimpulseigenzustände $\langle j'|\hat{V}|j\rangle$ auszuwerten.

2. (2 Punkte) Berechnen Sie die Energiekorrektur erster und zweiter Ordnung für den Grundzustand des Systems $j = 0$, $E_0^{(1)}$ und $E_0^{(2)}$. Berechnen Sie die Korrektur des Grundzustands $|\psi_0^{(0)}\rangle = |0\rangle$ bis zweite Ordnung, $|\psi_0^{(1)}\rangle$ und $|\psi_0^{(2)}\rangle$.

3. (3 Punkte) Wir bezeichnen mit $E_1^{(0)} = E_1$ die ungestörte Eigenenergie des Zustands mit $j = \pm1$. Benutzen Sie entartete Störungstheorie um die Korrektur erster Ordnung der Energieniveaus zu berechnen, d.h. berechnen Sie $E_{1x}^{(1)}$, $x = 1, 2$. Berechnen Sie auch die korrekten Zustände nullter Ordnung $|\psi_{1x}^{(0)}\rangle$, $x = 1, 2$.

4. (2 Punkte) Zeigen Sie für die $|j| \geq 2$ Zustände, dass die Energiekorrektur erster Ordnung $E_{|j|x}^{(1)}$, $x = 1, 2$ die Entartung nicht aufhebt.

## Lösung Aufgabe 1.

1. The potential can also be expressed as:

$$\hat{V} = \frac{\hbar\lambda}{4}\left(2 + \hat{U}^2 + \hat{U}^{\dagger 2}\right).$$

The matrix elements are then:

$$\langle j'|\hat{V}|j\rangle = \frac{\hbar\lambda}{4}\left(2\delta_{j'j} + \delta_{j'j+2} + \delta_{j'j-2}\right) = V_{j'j}.$$

2. The first order energy correction to the energy of the $j = 0$ state is:

$$E_0^{(1)} = \langle 0|\hat{V}|0\rangle = V_{00} = \frac{\hbar\lambda}{2}.$$

The first order correction for the $j = 0$ state is:

$$\begin{aligned} |\psi_0^{(1)}\rangle &= -\sum_{j\neq 0}\frac{V_{j0}}{E_j^{(0)} - E_0^{(0)}}|j\rangle = -\frac{\hbar\lambda}{4}\sum_{j\neq 0}\frac{1}{E_j^{(0)}}\left(\delta_{j,2} + \delta_{j,-2}\right)|j\rangle \\ &= -\frac{\hbar\lambda}{4}\frac{2mr^2}{\hbar^2}\sum_{j\neq 0}\frac{1}{j^2}\left(\delta_{j,2} + \delta_{j,-2}\right)|j\rangle \\ &= -\frac{mr^2}{8\hbar}\lambda\left(|2\rangle + |-2\rangle\right) \end{aligned}$$

The second order energy correction is:

$$\begin{aligned} E_0^{(2)} &= \langle 0|\hat{V}|\psi_0^{(1)}\rangle = \left[\frac{\hbar\lambda}{4}\left(2\langle 0| + \langle 2| + \langle -2|\right)\right]\left[-\frac{mr^2}{8\hbar}\lambda\left(|2\rangle + |-2\rangle\right)\right] \\ &= -\frac{mr^2\lambda^2}{16} \end{aligned}$$

Lastly, the second order correction for the $j = 0$ state is (here we have simplified the expressions beforehand using $E_0^{(0)} = 0$):

$$\begin{aligned} |\psi_0^{(2)}\rangle &= -\sum_{j\neq 0}\frac{V_{00}V_{j0}}{[E_j^{(0)}]^2}|j\rangle + \sum_{j,j'\neq 0}\frac{V_{jj'}V_{j'0}}{E_j^{(0)}E_{j'}^{(0)}}|j\rangle - \frac{1}{2}\sum_{j\neq 0}\frac{|V_{j0}|^2}{[E_j^{(0)}]^2}|0\rangle \\ &= \frac{2mr^2}{\hbar^2}\left(-\sum_{j\neq 0}\frac{V_{00}V_{j0}}{j^4}|j\rangle + \sum_{j,j'\neq 0}\frac{V_{jj'}V_{j'0}}{(jj')^2}|j\rangle - \frac{1}{2}\sum_{j\neq 0}\frac{|V_{j0}|^2}{j^4}|0\rangle\right). \end{aligned}$$

We will solve each of these sums independently, noting that the $\delta_{j0}$ term from $V_{j0}$ will not appear since we cannot have $j = 0$:

$$\begin{aligned} -\sum_{j\neq 0}\frac{V_{00}V_{j0}}{j^4}|j\rangle &= -\frac{\hbar\lambda}{2}\sum_{j\neq 0}\frac{\hbar\lambda}{4}\frac{1}{j^4}\left(\delta_{j,2} + \delta_{j,-2}\right)|j\rangle = -\frac{\hbar^2\lambda^2}{64}\Big(|2\rangle + |-2\rangle\Big) \\ -\frac{1}{2}\sum_{j\neq 0}\frac{|V_{j0}|^2}{j^4}|0\rangle &= -\frac{1}{2}\sum_{j\neq 0}\left(\frac{\hbar\lambda}{4}\right)^2\frac{1}{j^4}\left(\delta_{j,2} + \delta_{j,-2}\right)^2|0\rangle = -\frac{\hbar^2\lambda^2}{128}|0\rangle. \end{aligned}$$

And lastly, the most tedious term to calculate:

$$\begin{aligned} \sum_{j,j'\neq 0}\frac{V_{jj'}V_{j'0}}{(jj')^2}|j\rangle &= \frac{\hbar\lambda}{4}\sum_{j,j'\neq 0}\frac{V_{jj'}}{(jj')^2}\left(\delta_{j',2} + \delta_{j',-2}\right)|j\rangle = \frac{\hbar\lambda}{16}\sum_{j\neq 0}\frac{1}{j^2}\left(V_{j,2} + V_{j,-2}\right)|j\rangle \\ &= \frac{\hbar\lambda}{16}\frac{\hbar\lambda}{4}\sum_{j\neq 0}\frac{1}{j^2}\left([2\delta_{j,2} + \delta_{j,4} + \delta_{j,0}] + [2\delta_{j,-2} + \delta_{j,0} + \delta_{j,-4}]\right)|j\rangle \quad \text{the } \delta_{j,0} \text{ terms are ignored} \\ &= \frac{\hbar^2\lambda^2}{64}\Big(\frac{1}{2}\left(|2\rangle + |-2\rangle\right) + \frac{1}{16}\left(|4\rangle + |-4\rangle\right)\Big). \end{aligned}$$

Putting it all together:

$$
\begin{aligned}
|\psi_0^{(2)}\rangle &= \frac{2mr^2}{\hbar^2}\left[-\frac{\hbar^2\lambda^2}{64}\Big(|2\rangle + |-2\rangle\Big) + \frac{\hbar^2\lambda^2}{64}\Big(\frac{1}{2}\left(|2\rangle + |-2\rangle\right) + \frac{1}{16}\left(|4\rangle + |-4\rangle\right)\Big) - \frac{\hbar^2\lambda^2}{128}|0\rangle\right] \\
&= \frac{mr^2\lambda^2}{64}\Big(-\Big[|0\rangle + |2\rangle + |-2\rangle\Big] + \frac{1}{8}\Big[|4\rangle + |-4\rangle\Big]\Big).
\end{aligned}
$$

3. We start with the expression from the course notes:

$$
E_{nx}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(H_n^{1,1} + H_n^{2,2}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(H_n^{1,1} - H_n^{2,2})^2 + 4|H_n^{1,2}|^2},\ x = 1, 2
$$

where $H_n^{\alpha,\beta} = \langle\psi_{n\beta}^{(0)}|\hat{V}|\psi_{n\alpha}^{(0)}\rangle$, $\alpha, \beta = 1, 2$. For this system we can write the energy correction for the $j = \pm 1$ states in terms of the matrix elements of $\hat{V}$ as follows:

$$
E_{1x}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(V_{1,1} + V_{-1,-1}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(V_{1,1} - V_{-1,-1})^2 + 4|V_{1,-1}|^2},\ x = 1, 2
$$

The individual matrix elements are:

$$
\begin{aligned}
V_{1,1} &= \frac{\hbar\lambda}{4}\left(2\delta_{1,1} + \delta_{1,3} + \delta_{1,-1}\right) = \frac{\hbar\lambda}{2} \\
V_{-1,-1} &= \frac{\hbar\lambda}{4}\left(2\delta_{-1,-1} + \delta_{-1,1} + \delta_{-1,-3}\right) = \frac{\hbar\lambda}{2} \\
V_{1,-1} &= \frac{\hbar\lambda}{4}\left(2\delta_{1,-1} + \delta_{1,1} + \delta_{1,-3}\right) = \frac{\hbar\lambda}{4} = V_{-1,1}
\end{aligned}
$$

Plugging these in we get the following first order correction for the energy:

$$
E_{1x}^{(1)} = \frac{\hbar\lambda}{2} \pm \frac{\hbar\lambda}{4} = \frac{\hbar\lambda}{2}\left(1 \pm \frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad E_{1x}^{(1)} = \frac{\hbar\lambda}{4}, \frac{3\hbar\lambda}{4} \text{ for } x = 1, 2.
$$

And so the degeneracy is lifted. When determing the "corrected" wavefunctions, we must solve the equation

$$
\frac{1}{2}\left[(H_n^{1,1} - H_n^{2,2}) \mp \sqrt{(H_n^{1,1} - H_n^{2,2})^2 + 4|H_n^{1,2}|^2}\right] c_{1x} = -H_n^{1,2} c_{2x}
$$

which can again be rewritten for the $j = \pm 1$ degenerate states as

$$
\frac{1}{2}\left[(V_{1,1} - V_{-1,-1}) \mp \sqrt{(V_{1,1} - V_{-1,-1})^2 + 4|V_{1,-1}|^2}\right] c_{1x} = -V_{1,-1}c_{2x} \quad \Rightarrow \quad \mp|V_{1,-1}|c_{1x} = -V_{1,-1}c_{2x}
$$

since $V_{1,1} = V_{-1,-1}$. Since $|V_{1,-1}| = V_{1,-1}$ this further simplifies to $\mp c_{1x} = -c_{2x}$. With the condition that $|c_{1x}|^2 + |c_{2x}|^2 = 1$ we get that $|c_{1x}| = |c_{2x}| = 1/\sqrt{2}$. The corrected wavefunctions and the associated first order corrected energies are (up to an arbitrary choice in global phase):

$$
\begin{aligned}
|\psi_{1,1}^{(1)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|1\rangle - |-1\rangle\Big) \text{ and } E_{1,1}^{(1)} = \frac{\hbar\lambda}{4} \\
|\psi_{1,2}^{(1)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|1\rangle + |-1\rangle\Big) \text{ and } E_{1,2}^{(1)} = \frac{3\hbar\lambda}{4}
\end{aligned}
$$

4. We know for second order degenerate states that the energy degeneracy is lifted if:

$$
\Delta E = \sqrt{(H_n^{1,1} - H_n^{2,2})^2 + 4|H_n^{1,2}|^2} \neq 0.
$$

Our goal is to show that for $|j| \geq 2$ that $\Delta E = 0$. First we rewrite this in terms of matrix elements of $\hat{V}$ for $j$:

$$
\Delta E = \sqrt{(V_{j,j} - V_{-j,-j})^2 + 4|V_{j,-j}|^2}.
$$

And now write out the matrix elements:

$$\begin{aligned} V_{j,j} &= \frac{\hbar\lambda}{4}\left(2\delta_{j,j} + \delta_{j,j+2} + \delta_{j,j-2}\right) = \frac{\hbar\lambda}{2} \\ V_{-j,-j} &= \frac{\hbar\lambda}{4}\left(2\delta_{-j,-j} + \delta_{-j,-j+2} + \delta_{-j,-j-2}\right) = \frac{\hbar\lambda}{2} \\ V_{j,-j} &= \frac{\hbar\lambda}{4}\left(2\delta_{j,-j} + \delta_{j,-j+2} + \delta_{j,-j-2}\right) \end{aligned}$$

We have $V_{j,j} = V_{-j,-j}$ so these terms cancel in $\Delta E$. Lastly, for the $V_{j,-j}$ term to be non-zero we require that:

$$j = -j + 2 \to 2j = 2 \to j = 1 \quad \text{and} \quad j = -j - 2 \to 2j = -2 \to j = -1.$$

So, if $|j| \geq 2$ then $V_{j,-j} = 0$. Therefore $\Delta E = 0$ and the degeneracy is not lifted with a first order correction.

## Aufgabe 2. Zeitentwicklung und Messung (6 Punkte)

Wir erinnern uns an die Pauli-Matritzen, die wir auf Übungszettel 7 in Gl. (1) definiert haben. Wie Sie in der Vorlesung gelernt haben, kann der Hamiltonian Operators eines 2-Niveau Systems ausgedrückt werden als

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z\,. \tag{2}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich dieses System in einem beliebigen Zustand

$$|\psi(0)\rangle = \alpha\,|g\rangle + \beta\,|e\rangle\,, \quad \text{wobei} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\,. \tag{3}$$

1. (2 Punkte) Bestimmen Sie die Koeffizienten $\alpha$ und $\beta$ in $|\psi(t)\rangle$ für $t > 0$ und berechnen Sie den Erwartungswert von $\hat{\sigma}_y$ für diesen Zustand.
2. (2 Punkte) Wechseln Sie ins Heisenbergbild und bestimmen Sie $\hat{\sigma}_y^H(t)$. Berechnen Sie $\langle\psi(0)|\,\hat{\sigma}_y^H(t)\,|\psi(0)\rangle$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem vorigen Aufgabenteil.
3. (2 Punkte) Wir nehmen an, dass sich das System zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand Gl. 3 befindet. Nehmen Sie an, Sie messen am Zeitpunkt $t = \tau_1$ die Observable $\hat{\sigma}_x$. Was sind die möglichen Messwerte und was die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten?

## Lösung Aufgabe 2.

1. Der Zeitentwicklungsoperator ist gegeben durch

$$\hat{U}(t,0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$$

Angewandt auf den Zustand zur Zeit $t = 0$:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t,0)\,|\psi(0)\rangle = \hat{U}(t,0)\left(\alpha\,|g\rangle + \beta\,|e\rangle\right) = e^{i\frac{\omega_0}{2}t}\alpha\,|g\rangle + e^{-i\frac{\omega_0}{2}t}\beta\,|e\rangle$$

Damit ergibt sich für den Erwartungswert $\langle\psi(t)|\,\hat{\sigma}_y\,|\psi(t)\rangle$ im Schrödingerbild:

$$\begin{aligned} &\left(e^{-i\frac{\omega_0}{2}t}\alpha^*\,\langle g| + e^{i\frac{\omega_0}{2}t}\beta^*\,\langle e|\right)\hat{\sigma}_y\left(e^{i\frac{\omega_0}{2}t}\alpha\,|g\rangle + e^{-i\frac{\omega_0}{2}t}\beta\,|e\rangle\right) \\ &= \langle g|\,\hat{\sigma}_y\,|e\rangle\,e^{-i\omega_0 t}\alpha^*\beta + \langle e|\,\hat{\sigma}_y\,|g\rangle\,e^{i\omega_0 t}\alpha\beta^* \\ &= -i\alpha^*\beta\left(\cos(\omega_0 t) - i\sin(\omega_0 t)\right) + i\beta^*\alpha\left(\cos(\omega_0 t) + i\sin(\omega_0 t)\right) \\ &= 2\,\mathrm{Im}(\alpha^*\beta)\cos(\omega_0 t) - 2\,\mathrm{Re}(\alpha^*\beta)\sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

2. Wir beachten, dass $\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_y = -\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_z$ ist und damit $\hat{U}^\dagger\hat{\sigma}_y = \hat{\sigma}_y\hat{U}$, also

$$\begin{aligned} \hat{U}^\dagger(t,0)\hat{\sigma}_y\hat{U}(t,0) &= \hat{\sigma}_y\hat{U}^2(t,0) \\ &= \hat{\sigma}_y\left(\cos^2(\omega_0 t/2) - \sin^2(\omega_0 t/2)\right) - \hat{\sigma}_x 2\cos(\omega_0 t/2)\sin(\omega_0 t/2) \\ &= \hat{\sigma}_y\cos(\omega_0 t) - \hat{\sigma}_x\sin(\omega_0 t) = \hat{\sigma}_y^H \end{aligned}$$

Alternativ kann man dies auch mit der BCH-Formel lösen. Damit ergibt sich der Erwartungswert

$$\langle\psi(0)|\,\hat{\sigma}_y^H(t)\,|\psi(0)\rangle = 2\,\mathrm{Im}(\alpha^*\beta)\cos(\omega_0 t) - 2\,\mathrm{Re}(\alpha^*\beta\sin(\omega_0 t)\,.$$

Damit sehen wir, dass Schrödingerbild und Heisenbergbild dasselbe Ergebnis liefern.

3. Die Eigenwerte und die Eigenzustände von $\hat{\sigma}_x$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} EW = +1: \qquad |+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|g\rangle + |e\rangle\right) \\ EW = -1: \qquad |-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|g\rangle - |e\rangle\right) \end{aligned}$$

Desweiteren kann die Wellenfunktion als Linearkombination von $|\pm\rangle$ geschrieben werden

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha e^{i\omega_0 t/2} + \beta e^{-i\omega_0 t/2}\right)|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha e^{i\omega_0 t/2} - \beta e^{-i\omega_0 t/2}\right)|-\rangle$$

Damit messen wir den EW +1 mit der Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(+,\tau_1) = |\langle +|\,\psi(\tau)\,\rangle|^2 &= \frac{1}{2}\left|\alpha e^{i\omega_0 t/2} + \beta e^{-i\omega_0 t/2}\right|^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \mathrm{Re}(\alpha\beta^*)\cos(\omega_0\tau_1) - 2\,\mathrm{Im}(\alpha\beta^*)\sin(\omega_0\tau_1)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + 2\,\mathrm{Re}(\alpha\beta^*)\cos(\omega_0\tau_1) - 2\,\mathrm{Im}(\alpha\beta^*)\sin(\omega_0\tau_1)\right) \end{aligned}$$

und den EW -1 mit der Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(-,\tau_1) = |\langle -|\,\psi(\tau)\,\rangle|^2 &= \frac{1}{2}\left|\alpha e^{i\omega_0 t/2} - \beta e^{-i\omega_0 t/2}\right|^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - 2\,\mathrm{Re}(\alpha\beta^*)\cos(\omega_0\tau_1) + 2\,\mathrm{Im}(\alpha\beta^*)\sin(\omega_0\tau_1)\right) \end{aligned}$$

## Aufgabe 3. Getriebenes 2-Niveau System (6 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachen wir ein 2-Niveau System mit einem Grundzustand $|1\rangle$ und einem angeregten Zustand $|2\rangle$, das von einem externen Laser mit einer Frequenz $\omega$ und einer reellen Kopplungsamplitude $V$ getrieben wird. Der Hamiltonian für dieses System ist gegeben als

$$\hat{H} = \omega_1\,|1\rangle\langle 1| + \omega_2\,|2\rangle\langle 2| + V\cos(\omega t + \phi)\left[|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right]\,. \tag{4}$$

1. (1 Punkt) Schreiben Sie die Wellenfunktion als Superposition eines Grundzustandes $|\psi(t)\rangle = b_1(t)\,|1\rangle + b_2(t)\,|2\rangle$, wobei die Zeitabhängigkeit in den Koeffizienten $b_j(t)$ steckt. Zeigen Sie mit Hilfe der Schrödinger Gleichung, dass folgende Differentialgleichungen für die Koeffizienten erfüllt sein müssen (verwenden Sie $\hbar = 1$):

$$i\frac{\mathrm{d}b_1}{\mathrm{d}t} = \omega_1 b_1 + V\cos(\omega t + \phi)b_2 \tag{5}$$

$$i\frac{\mathrm{d}b_2}{\mathrm{d}t} = \omega_2 b_2 + V\cos(\omega t + \phi)b_1 \tag{6}$$

2. (1 Punkt) Zeigen Sie, dass sich die Bewegungsgleichungen umschreiben lassen, als

$$i\frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}t} = \frac{V}{2}c_2 \tag{7}$$

$$i\frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}t} = \frac{V}{2}c_1 + (\omega_2 - \omega)\,c_2 \tag{8}$$

wobei Sie annehmen können, dass $b_1 = c_1$, $b_2 = c_2 e^{i\omega t}$ und $\omega_1 = 0$, sowie dass die Phasenverschiebung verschwindet, d.h. $\phi = 0$. Arbeiten Sie im Rahmen der sogenannten Rotating Wave Approximation, das heißt nehmen Sie an, dass schnell oszillierende Terme (d.h. $\propto e^{\pm 2i\omega t}$ oder höher) vernachlässigt werden können.

3. (2 Punkte) Betrachten Sie nun den Fall eines resonanten Drives, d.h. $\omega = \omega_2$. Lösen Sie die gekoppelten Differentialgleichungen, indem Sie Gl. 8 ableiten und Gl. 7 einsetzen. Lösen Sie die Gleichung, die Sie erhalten, mit einem Sinus-Ansatz.

4. (1 Punkt) Stellen Sie die Besetzung der beiden Zustände (d.h. das Betragsquadrat von $c_j$) als Funktion der Zeit graphisch dar und bestimmen Sie die Frequenz der Oszillation, indem Sie das Betragsquadrat explizit berechnen.

5. (1 Punkt) Was ist die Besetzung des 2-Niveau Systems, das sich anfangs im Grundzustand befindet und dann einem $\pi$-Puls ausgesetzt wird? Damit meinen wir eine Anregung, die zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltet wird und zur Zeit $t = \pi/V$ wieder ausgeschaltet wird. Stellen Sie die Zeitentwicklung dieses Systems graphisch dar (wir vernachlässigen hierbei spontane Emission).

## Lösung Aufgabe 3.

1. Schrödinger Gleichung mit $\hbar = 0$:

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\psi(t)\right\rangle = \hat{H}\left|\psi(t)\right\rangle$$

Wellenfunktion einsetzen:

$$i\frac{\mathrm{d}b_1}{\mathrm{d}t}\left|1\right\rangle + i\frac{\mathrm{d}b_2}{\mathrm{d}t}\left|2\right\rangle = \omega_1 b_1\left|1\right\rangle + \omega_2 b_2\left|2\right\rangle + V\cos\left(\omega t + \phi\right)\left(b_1\left|2\right\rangle + b_2\left|1\right\rangle\right)$$

Da die beiden Eigenzustände orthonormal sind, erhalten wir eine Gleichung für $\left|1\right\rangle$ und eine für $\left|2\right\rangle$, die beide erfüllt sein müssen, nämlich genau die gesuchten Differentialgleichungen (1 Punkt).

2. Wir benutzen, dass $c_2 = b_2 e^{i\omega t}$ und wie angegeben $b_1 = c_1$, $\phi = 0$ und $\omega_1 = 0$. Wir nutzen außerdem:

$$\frac{\mathrm{d}b_2}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}t} - i\omega c_2\right)e^{-i\omega t}$$

Wir schreiben auch den cos als

$$\cos\left(\omega t\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} i\frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}t} &= \frac{V}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) \\ &= \frac{V}{2}\left(1 + e^{-2i\omega t}\right) \approx \frac{V}{2}c_2 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir den schnell rotierenden $e^{-2i\omega t}$ Term vernachlässigt. Diese Näherung heißt Rotating Wave Approximation. Mit den obigen Annahmen erhalten wir

$$\begin{aligned} i\left(\frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}t} - i\omega c_2\right)e^{-i\omega t} &= \frac{V}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)c_1 + \omega_2 c_2 e^{-i\omega t} \\ i\left(\frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}t} - i\omega c_2\right) &= \frac{V}{2}\left(1 + e^{-2i\omega t}\right)c_1 + \omega_2 c_2 \\ i\frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}t} &\approx \frac{V}{2}c_1 + \left(\omega_2 - \omega\right)c_2 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir wieder die Rotating Wave Approximation angewandt (1 Punkt).

3. Im resonanten Fall $\omega = \omega_2$ erhalten wir zwei symmetrische Gleichungen:

$$\begin{aligned} i\frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}t} &= \frac{V}{2}c_2 \\ i\frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}t} &= \frac{V}{2}c_1 \end{aligned}$$

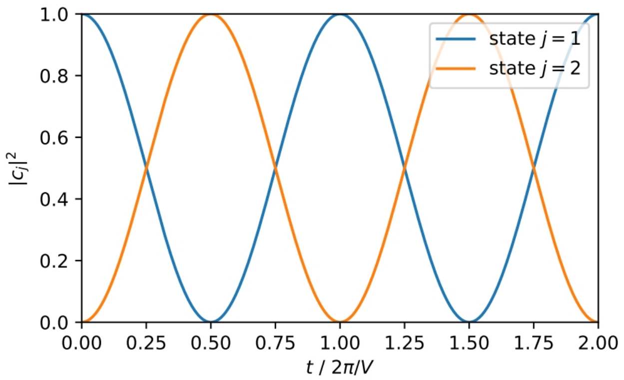


Figure 1: Skizze zu Aufg. 3.4: Rabi-Oszillationen eines getriebenen 2-Niveau Systems.

Wir leiten ab:

$$i\frac{\mathrm{d}^2c_2}{\mathrm{d}t^2} = \frac{V}{2}\frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}t}$$

Durch Einsetzen von Gl. 7 (1 Punkt):

$$i\frac{\mathrm{d}^2c_2}{\mathrm{d}t^2} = -i\left(\frac{V}{2}\right)^2\frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}t}$$

Lösung mit Sinus-Ansatz:

$$c_2(t) = A\sin\left(\frac{V}{2}t+\varphi\right)$$

Das Paar gekoppelter Differentialgleichungen ist symmetrisch, daher muss auch $c_1$ in ähnlicher Form oszillieren. Die Normierung der Wellenfunktion ergibt, dass $|c_1|^2+|c_2|^2=1$, damit finden wir (1 Punkte):

$$c_1(t) = i\cos\left(\frac{V}{2}t+\varphi\right)$$
$$c_2(t) = \sin\left(\frac{V}{2}t+\varphi\right)$$

wobei $\varphi$ von der Anfangsbedingung abhängt.

4. Wir berechnen das Betragsquadrat:

$$|c_2(t)|^2 = \sin^2\left(\frac{V}{2}t+\varphi\right) = \frac{1-\cos(Vt+2\varphi)}{2}$$

Die Frequenz der Oszillation ist die sogenannte Rabi Frequenz $V$. Plot in Fig. 1 (hier für $\varphi=0$, d.h. im Anfangszustand ist nur der Grundzustand besetzt) (1 Punkt).

5. Vor Einschalten des $\pi$-Pulses ist das System im Grundzustand und es besteht keine Kopplung zwischen den beiden Niveaus. In der Zeit $\pi/V$ durchläuft das System einen halben Rabi Zyklus und ist daher anschließend volltändig invertiert (siehe Fig. 2). (1 Punkt)

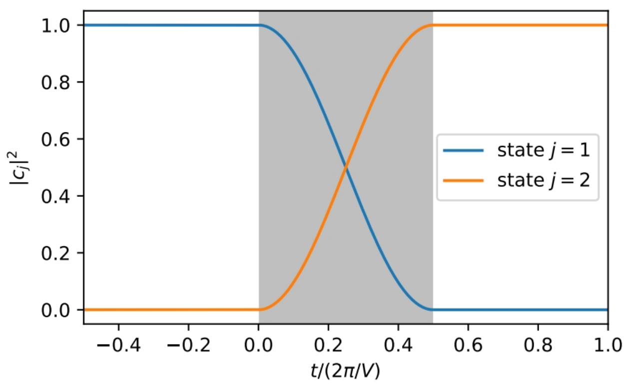


Figure 2: Skizze zu Aufg. 3.5: Zeitentwicklung eines getriebenen 2-Niveau Systems.