Moderne Theoretische Physik I
Grundlagen der Quantenmechanik

Blatt 10

Prof. A. Metelmann
S. Böhling, L. Orr, V. Stangier
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Abgabe bis: 07.07.2023, 14:00 Uhr

Das Übungsblatt wird in Gruppen von maximal 3 Personen bearbeitet. Die Abgabe erfolgt digital über ILIAS.

Aufgabe 1. Drehimpuls Kommutatorrelationen (6 Punkte)

Der Drehimpulsoperator $\hat{\mathbf{L}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$ ist in dreidimensionalen kartesischen Koordinaten definiert als Kreuzprodukt zwischen Ortsoperator $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ und Impulsoperator $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$, also $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}}$.

1. (3 Punkte) Zeigen Sie, dass der Drehimpulsoperator die folgenden Kommutatorrelationen erfüllt:
$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k \quad \text{wobei} \quad \epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{wenn } \{ijk\} = \{123\}, \{312\}, \{231\} \\ -1, & \text{wenn } \{ijk\} = \{132\}, \{213\}, \{321\} \\ 0, & \text{wenn zwei beliebige Indizes gleich sind,} \end{cases} \tag{1}$$
wobei wir definieren, dass $x = 1, y = 2$, und $z = 3$. ϵ_{ijk} heißt Levi-Civita Symbol. Von den obigen Definitionen können wir sehen, dass es $+1$ ist, wenn die Indexvertauschungen $\{ijk\}$ gerade sind und -1 für ungerade Indexvertauschungen.

2. (3 Punkte) Zeigen Sie, dass der Operator $\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$ mit allen individuellen Komponenten von $\hat{\mathbf{L}}$ vertauscht.

Aufgabe 2. Bahndrehimpuls (6 Punkte)

1. (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Komponenten des Drehimpulsoperators in Kugelkoordinaten $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$ und $z = r\cos\theta$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ gegeben sind durch
$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{i}\left(-\sin\phi\partial_\theta - \frac{\cos\phi}{\tan\theta}\partial_\phi\right) \tag{2}$$
$$\hat{L}_y = \frac{\hbar}{i}\left(\cos\phi\partial_\theta - \frac{\sin\phi}{\tan\theta}\partial_\phi\right) \tag{3}$$
$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\partial_\phi \tag{4}$$
wobei $\partial_\theta = \frac{\partial}{\partial_\theta}$ und $\partial_\phi = \frac{\partial}{\partial_\phi}$. Verwenden Sie hierfür, dass der Gradient in Kugelkoordinaten gegeben ist durch
$$\nabla = \hat{\mathbf{e}}_r\partial_r + \hat{\mathbf{e}}_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta + \hat{\mathbf{e}}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi \tag{5}$$
mit den Einheitsvektoren
$$\hat{\mathbf{e}}_r = \sin\theta\cos\phi\hat{\mathbf{e}}_x + \sin\theta\sin\phi\hat{\mathbf{e}}_y + \cos\theta\hat{\mathbf{e}}_z \tag{6}$$
$$\hat{\mathbf{e}}_\theta = \cos\theta\cos\phi\hat{\mathbf{e}}_x + \cos\theta\sin\phi\hat{\mathbf{e}}_y - \sin\theta\hat{\mathbf{e}}_z \tag{7}$$
$$\hat{\mathbf{e}}_\phi = -\sin\phi\hat{\mathbf{e}}_x + \cos\phi\hat{\mathbf{e}}_y. \tag{8}$$

2. (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion

$$\psi\left(r\right) = N\left(x + y + 2z\right) e^{-\frac{r^2}{a^2}} \tag{9}$$

eine Eigenfunktion des Operators $\hat{\mathbf{L}}^2$ ist, wobei

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = -\hbar^2 \left(\partial_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2 + \frac{1}{\tan\theta}\partial_\theta\right). \tag{10}$$

Die Wirkung von $\hat{\mathbf{L}}^2$ auf seine Eigenfunktionen ist gegeben durch

$$\hat{\mathbf{L}}^2 \psi\left(\mathbf{r}\right) = \hbar^2 l\left(l+1\right)\psi\left(\mathbf{r}\right). \tag{11}$$

Bestimmen Sie $l \in \mathbb{N}_0$.

3. (2 Punkte) Wie lautet der Erwartungswert $\langle \hat{L}_z \rangle$ für diese Wellenfunktion? Drücken Sie den winkelabhängigen Teil der Wellenfunktion durch Kugelflächenfunktionen aus. Die Wirkung von $\hat{L}_z$ auf Kugelflächenfunktionen ist dann gegeben durch

$$\hat{L}_z Y_l^m(\theta,\phi) = \hbar m Y_l^m(\theta,\phi) \tag{12}$$

Aufgabe 3. Drehimpulsoperator (6 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie den allgemeinen Drehimpulsoperator kennengelernt. Sie haben dort auch Leiteroperatoren $\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}y$ definiert, die uns ähnlich wie Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren einen Zustand höher oder niedriger bringen.

1. (2 Punkte) Berechnen Sie die Varianz der Komponenten $\hat{J}_x$ und $\hat{J}_y$ für einen Zustand $|jm\rangle$. In welchem Zustand $|jm\rangle$ mit einem gegebenen j besitzen diese Varianzen ihr Minimum und wie groß ist diese minimale Varianz?

2. (4 Punkte) Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\text{(a)} \qquad |j\,m\rangle = \sqrt{\frac{(j+m)!}{(2j)!(j-m)!}}\left(\frac{1}{\hbar}\hat{J}_-\right)^{j-m}|j\,j\rangle \tag{13}$$

$$\text{(b)} \qquad |j\,m\rangle = \sqrt{\frac{(j-m)!}{(2j)!(j+m)!}}\left(\frac{1}{\hbar}\hat{J}_+\right)^{j+m}|j\,-j\rangle \tag{14}$$

Aufgabe 4. Hermitesch adjungierter Impulsoperator (2 Punkte)

Wir wissen, dass der Impulsoperator selbstadjungiert ist, also $\hat{p} = \hat{p}^\dagger$. Im Ortsraum impliziert dies, dass:

$$\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^\dagger = i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\dagger = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \quad \text{und daher} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\dagger = -\frac{\partial}{\partial x}. \tag{15}$$

Sie sehen also, dass die Adjungierte nicht equivalent zur komplex Konjugierten ist, wenn wir Differentialoperatoren behandeln. Ihr Ziel in diesem Problem ist es zu zeigen, dass $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\dagger = -\frac{\partial}{\partial x}$. Sie können dies tun, indem Sie die Definition der Adjungierten eines Operators, nämlich $\langle\phi|\hat{A}\psi\rangle = \langle\hat{A}^\dagger\phi|\psi\rangle$ benutzen (partielle Integration kann hier hilfreich sein).