Moderne Theoretische Physik I
Grundlagen der Quantenmechanik

Blatt 11

Prof. A. Metelmann
S. Böhling, L. Orr, V. Stangier
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Abgabe bis: 14.07.2023, 14:00 Uhr

Das Übungsblatt wird in Gruppen von maximal 3 Personen bearbeitet. Die Abgabe erfolgt digital über ILIAS.

Aufgabe 1. Gesamtdrehimpuls (9 Punkte)

Wir betrachten ein Teilchen mit Bahndreimpuls $l = 1$ und Spin $s = \frac{1}{2}$. Die Eigenzustände dieses Teilchens lassen sich in der Produktbasis $|l\, m_l\, s\, m_s\rangle = |l\, m_l\rangle \otimes |s\, m_s\rangle$ der Operatoren $\hat{L}_z$, $\hat{\mathbf{L}}^2$ und $\hat{s}_z$, $\hat{\mathbf{s}}^2$ darstellen. In dieser Aufgabe werden wir die Eigenzustände des Gesamtdrehimpulses $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{s}}$ bestimmen. Dessen Eigenbasis $|l\, s\, J\, M\rangle$ ist durch die gemeinsamen Eigenzustände der Operatoren $\hat{J}_z$, $\hat{\mathbf{J}}^2$ und $\hat{\mathbf{s}}^2$, $\hat{\mathbf{L}}^2$ gegeben.

1. (2 Punkte) Zeigen Sie, dass auch die Komponenten des Gesamtdrehimpulses eine Drehimpulsalgebra erfüllen, d.h. zeigen Sie, dass
$$\left[\hat{J}_k\,, \hat{J}_l\right] = i\hbar\epsilon_{klm}\hat{J}_m\,, \tag{1}$$
wobei ϵ_{klm} für das Ihnen bekannte Levi-Cevita Symbol steht.

2. (3 Punkte) Zeigen Sie, dass $\hat{J}_z$, $\hat{\mathbf{J}}^2$, $\hat{\mathbf{s}}^2$ und $\hat{\mathbf{L}}^2$ tatsächlich einen gemeinsamen Satz von Eigenfunktionen besitzen, indem Sie ihre Kommutatorrelationen untersuchen. Welche Werte können die Eigenwerte von $\hat{L}_z$ annehmen?

3. (4 Punkte) Konstruieren Sie die Eigenzustände des Gesamtdrehimpulses. Führen Sie hierzu Auf- und Absteigeoperatoren $\hat{J}_\pm$ ein und lassen Sie diese sukzessive auf Zustände mit minimalem oder maximalem Gesamtdrehimpuls wirken. Berechnen Sie so für alle möglichen Zustände mit $|l\, s\, J\, M\rangle = \sum_{m_l\, m_s} C^{j\, m_j}_{l\, m_l\, s\, m_s} |l\, m_l\, s\, m_s\rangle$ den zugehörigen Clebsch-Gordan Koeffizienten $C^{J\,,M}_{l\, m_l\, s\, m_s} = \langle l\, m_l\, s\, m_s\, |l\, s\, J\, M\rangle$.

Aufgabe 2. Addition von zwei Spins (6 Punkte)

Wir betrachten ein System aus zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen ($j = 1, 2$). Der Spin-Operator $\hat{\mathbf{s}}_1$ sei der Operator für den Spin des ersten Teilchens, $\hat{\mathbf{s}}_2$ der Operator für den zweiten Spin. Die Operatoren wirken auf verschiedene Teilchen, daher vertauscht jede Komponente des Operators $\hat{\mathbf{s}}_1$ mit jeder Komponente von $\hat{\mathbf{s}}_2$. Für jeden der beiden Spins gibt es zwei linear unabhängige Orientierungen und damit vier linear unabhängige Zustände des Gesamtsystems. Wählen wir z als Quantisierungsachse wird der Hilbertraum durch die gemeinsamen Eigenzustände der Operatoren $\hat{s}_{1,z}$ und $\hat{s}_{2,z}$ aufgespannt. Die Basiszustände können als $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\downarrow\rangle$ geschrieben werden. Das erste Symbol bezieht sich dabei auf den Eigenwert des Operators $\hat{s}_{1,z}$, das zweite auf den Eigenwert des Operators $\hat{s}_{2\,,z}$. Der Gesamtspin $\hat{\mathbf{s}}_{tot}$ des Systems ergibt sich einfach durch die Summe der Einzelspins.

1. (2 Punkte) Zeigen Sie, dass der Operator $\hat{\mathbf{s}}_{tot}$ die Kommutatorrelationen der Drehimpulsalgebra erfüllt. Zeigen Sie weiter, dass auch die Kommutatorrelation $\left[\hat{\mathbf{s}}^2_{tot}\,, \hat{s}_{tot,z}\right] = 0$ gilt.

2. (2 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenzustände und Eigenwerte des Operators $\hat{s}_{tot\,,z}$ für die z-Komponente des Gesamtspins in der oben beschriebenen Basis.

3. (2 Punkte) Finden Sie die gemeinsamen Eigenzustände von $\hat{\mathbf{s}}^2_{tot}$ und $\hat{s}_{tot,z}$ und bestimmen Sie für diese Zustände die Eigenwerte des Operators $\hat{\mathbf{s}}^2_{tot}$.
Hinweis: Das Produkt $\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_2$ kann durch die Operatoren $\hat{s}^z_j$ und $\hat{s}^\pm_j$ dargestellt werden.

Aufgabe 3. Addition mehrerer Spins (5 Punkte)

In dieser Aufgabe addieren wir die Drehmomente von drei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen. Die magnetischen Quantenzahlen dieser drei Teilchen sind $m_1 = m_2 = 1/2$ und $m_3 = -1/2$. Addition mehrerer Drehmomente funktioniert so, dass man ein Teilchenpaar zusammenfügt und zu diesem Ergebnis dann den Drehimpuls des dritten Teilchens addiert und so weiter. Wir werden nun die Drehimpulse in zwei unterschiedlichen Reihenfolgen addieren.

1. (2 Punkte) Schreiben Sie zunächst den Tensorproduktzustand von Teilchen 1 und 2 $|j_1\, m_1\; j_2\, m_2\rangle = |\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle$ in der Gesamtdrehimpulsbasis $|j\,m\rangle$. Dannach schreiben Sie das Tensorprodukt von diesem Ergebnis mit dem dritten Teilchen $|j\,m\,j_3 = \frac{1}{2}\,m_3 = -\frac{1}{2}\rangle$ in der Gesamtdrehimpulsbasis.

2. (2 Punkte) In diesem Aufgabenteil addieren Sie zuerst die Drehimpulse von Teilchen 1 und 3. Dannach nehmen Sie dieses Ergebnis und addieren den Drehimpuls von Teilchen 2.

3. (1 Punkt) Die Endergebnisse der ersten beiden Aufgabenteile sind unterschiedlich. Begründen Sie dies.

Tabellen von Clebsch-Gordan Koeffizienten lesen

In der letzten Aufgabe dürfen Sie Tabellen von Clebsch-Gordan Koeffizienten konsultieren, so wie diese hier. Wir geben hier eine kurze Erklärung für alle, die sich unsicher sind, wie so eine Tabelle gelesen wird. Starten wir mit einem Zustand $|j_1\, m_1, j_2\, m_2\rangle$, so suchen wir zunächst die korrekte Tabelle, was von dem Wert des Drehimpulses in der Tensorproduktbasis abhängt. Die verlinkte Tabelle nutzt die Bezeichnung $j_1 \times j_2$. Dannach benutzt man die Werte für m_1 und m_2, um die richtige Zeile zu finden. Die Einträge in der Zeile sind die Clebsch-Gordan Koeffizienten, und die $|J\,M\rangle$ Zustände, die wir in der Entwicklung in der Gesamtdrehimpulsbasis benötigen, sind oben in der jeweiligen Zeile gegeben. Zum Beispiel finden wir in Tabelle $|2\,1\,1\,1\rangle = \sqrt{2/3}\,|3\,2\rangle - \sqrt{1/3}\,|2\,2\rangle$. Die Tabelle kann auch anders herum genutzt werden, wenn wir in einem Zustand in der Gesamtdrehimpulsbasis $|J\,M\rangle$ beginnen, können wir in eine Tensorproduktbasis wechseln indem wir die Einträge in der Spalte nutzen.

Da es sich bei diesem Vorgang lediglich um einen Basiswechsel handelt, können wir durch eine Matrixtransformation von einer Basis in die andere wechseln. In diesem Fall ist die Matrix der Basistransformation orthogonal und ihre Einträge sind die Clebsch-Gordan Koeffizienten. Als ein Beispiel betrachten wir den Fall von zwei Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen. Der Gesamtdrehimpuls kann die Werte $J = 0, 1$ annehmen. Die ursprünglichen Zustände können in der neuen Basis geschrieben werden, indem Sie den Vektor mit der Transformationsmatrix multiplizieren:

$$\begin{bmatrix} |\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\,\text{-}\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{1}{2}\,\text{-}\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{1}{2}\,\text{-}\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\,\text{-}\frac{1}{2}\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |1\,1\rangle \\ |1\,0\rangle \\ |0\,0\rangle \\ |1\,\text{-}1\rangle \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Hier können Sie von der Gesamtdrehimpulsbasis zurück in die Tensorproduktbasis gehen, indem Sie mit der Transponierten dieser Matrix multiplizieren. Wenn Sie die zugehörige Koeffiziententabelle in dem Link betrachten, werden Sie sehen, dass die meisten Elemente dieser Matrix nicht gezeigt werden. Im Allgemeinen werden nur die Clebsch-Gordan Koeffizienten in Tabellen genannt, die nicht Null sind. Ansonsten stünden auf der Seite hauptsächlich Nullen.