Moderne Theoretische Physik I

Grundlagen der Quantenmechanik

Blatt 12

Prof. A. Metelmann
S. Böhling, L. Orr, V. Stangier
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Abgabe bis: 21.07.2023, 14:00 Uhr

Das Übungsblatt wird in Gruppen von maximal 3 Personen bearbeitet. Die Abgabe erfolgt digital über ILIAS.

Aufgabe 1. Wigner-Eckart Theorem (12 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir ein Teilchen mit einem Drehmoment $j = 1$ in einem magnetischen Feld $\mathbf{B} = B_0 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi$. Dieses Problem ist eine Anwendung des Wigner-Eckart Theorems für die Berechnung von Übergangselementen. Wir erinnern uns, dass das Wigner-Eckart Theorem uns erlaubt die Matrixelemente von sphärischen Tensoroperatoren als Produkt von Clebsch-Gordan Koeffizienten und einem "reduzierten Matrixelement", das nur vom Gesamtdrehimpuls abhängt, zu formulieren:

$$\langle j' m' | T_q^{(k)} | j m \rangle = \langle j m k q | j' m' \rangle \langle j || T^{(k)} || j' \rangle. \quad (1)$$

Da das reduzierte Matrixelement $\langle j || T^{(k)} || j' \rangle$ weder von den Werten von m oder m' noch von der Ordnung des sphärischen Tensoroperators q abhängt, müssen wir es lediglich ein Mal ausrechnen, wobei wir mit Konstanten j und j' arbeiten. Vollständigkeitshalber erinnern wir uns, dass $\langle j' m' k q | j m \rangle$ die Clebsch-Gordan Koeffizienten sind.

1. (3 Punkte) Ein sphärischer Tensoroperator mit Rang k und Ordnung q erfüllt die folgenden Kommutatorrelationen mit Drehimpulsoperatoren:

$$[\hat{J}_z, T_q^{(k)}] = \hbar q T_q^{(k)} \quad [\hat{J}_\pm, T_q^{(k)}] = \hbar \sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)} T_{q\pm 1}^{(k)}. \quad (2)$$

Da die Ordnung des sphärischen Tensors den Rang nicht überschreiten kann, müssen folgende Kommutatoren verschwinden:

$$[\hat{J}_+, T_k^{(k)}] = 0 \quad \text{and} \quad [\hat{J}_-, T_{-k}^{(k)}] = 0. \quad (3)$$

Das magnetische Feld $\mathbf{B}$ ist die Summe von zwei sphärischen Tensoroperatoren mit Ordnung $q = \pm 1$. Benutzen Sie diese Kommutatorrelationen um den Rang und die expliziten Ausdrücke für die beiden sphärischen Tensoren zu erhalten.

2. (4 Punkte) Wir betrachten zuerst Übergänge von einem anfänglichen Drehimpuls $j = 1$ nach $j' = 1$. Welche Übergänge sind hier für die möglichen Anfangszustände $|j m\rangle = |1 -1\rangle, |1 0\rangle, |1 1\rangle$ erlaubt und was sind die zugehörigen Übergangselemente?
3. (5 Punkte) Ist ein Übergang von einem Drehimpuls von $j = 1$ zu einem Drehimpuls von $j' = 2$ möglich? Und zu einem Drehimpuls $j' = 3$? Falls ja, geben Sie alle erlaubten Übergänge an sowie deren Übergangselemente.

Aufgabe 2. Teilchen im dreidimensionalen Potentialtopf (8 Punkte)

Der Hamiltonian eines Teilchens in einem dreidimensionalen kugelsymmetrischen Potentialtopf ist gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{p}_r^2 + \frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{\hat{r}^2} + V(\hat{r}) \right) \quad (4)$$

mit einem kugelsymmetrischen Potential $V(r)$ und $\hat{p}_r = -i\hbar\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r$. Dies lässt sich immer durch einen Produktansatz der Form

$$\psi(\mathbf{r}) = R(r)Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (5)$$

lösen, wobei Y_{lm} die Kugelflächenfunktionen sind, für die $\hat{\mathbf{L}}^2 Y_{lm} = \hbar^2 l(l+1)Y_{lm}$ gilt. Hiermit erhält man für den Radialanteil $R(r)$ die effektiv eindimensionale Bestimmungsgleichung

$$\left[\frac{\hat{p}_r^2}{2m} + V_{\text{eff}}(r) \right] R(r) = ER(r) \quad (6)$$

mit $V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \hbar^2 l(l+1)/(2mr^2)$. In dieser Aufgabe betrachten wir einen endlichen, dreidimensionalen Potentialtopf, also

$$V(r) = \begin{cases} -U_0, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases} \quad (7)$$

und suchen gebundene Zustände mit $-U_0 < E < 0$.

1. (1 Punkt) Der Hamilton-Operator in Gl. 6 enthält normalerweise erste und zweite Ableitungen der Funktionen $R(r)$. Machen Sie den Ansatz $R(r) = u(r)r^\alpha$ und wählen Sie α so, dass die erste Ableitung verschwindet.
2. (3 Punkte) Bestimmen Sie aus Gl. 6 die Differentialgleichung für $u(r)$ und lösen Sie diese für $l = 0$ in den beiden Bereichen $r > a$ und $r < a$. Wie hängen die Lösungen jeweils von der Energie E ab? *Hinweis:* Berücksichtigen Sie, dass die gesuchte Lösung $R(r)$ in $r = 0$ endlich sein muss und für $r \rightarrow \infty$ verschwinden muss.
3. (1 Punkt) Bei $r = a$ müssen $u(r)$ und die Ableitung $u'(r)$ stetig sein. Notieren Sie beide Stetigkeitsbedingungen und bilden Sie deren Quotienten (die 'logarithmische Ableitung') um die erlaubten gebundenen Energieniveaus zu finden.
4. (3 Punkte) Finden Sie das niedrigste Energieniveau indem Sie die obige Bedingung auf die Form

$$\sin(ka) = \pm \sqrt{\frac{\hbar^2}{2ma^2U_0}} ka \quad (8)$$

bringen und diskutieren Sie, wann diese Gleichung nicht-triviale Lösungen hat. Gibt es für jedes U_0 einen gebundenen Zustand? *Hinweis:* Drücken Sie den Impuls im Bereich $r > a$ durch den Impuls im Bereich $r < a$ aus und verwenden Sie $\sqrt{1-x^2}/x = \cot(\arcsin(x))$. Berücksichtigen Sie auch, dass aus der vorherigen Teilaufgabe eine zusätzliche Bedingung an das Vorzeichen von $\cot(ka)$ folgt.