Aufgabe 1: Kurzaufgaben

(2+2+2+4=10 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Spur $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu)$.

(b) k^μ sei ein 4-Vektor. Zeigen Sie, dass gilt: $\not{k}\not{k} = k^2$.

(c) Berechnen Sie $\gamma_0 \not{p} \gamma_0$.

(d) $U = C\beta + \lambda\vec{\alpha}\vec{p}/m$, wobei α und β die 4×4-Matrizen der Dirac-Gleichung sind. Zeigen Sie, dass für $C = \sqrt{1 - \lambda^2\vec{p}^2/m^2}$ und reelles λ die Matrix U unitär ist.

Aufgabe 2: Gordon-Zerlegung

(3+7=10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass gilt: $\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}$, wobei $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$.

(b) Gegeben seien die Impulsraum-Spinoren $u(p_i)$ und $\overline{u}(p_f)$, die die Dirac-Gleichungen $(\not{p}_i - m)u(p_i) = 0$ bzw. $\overline{u}(p_f)(\not{p}_f - m) = 0$ erfüllen. Zeigen Sie, dass gilt

$$\overline{u}(p_f)\gamma^\mu u(p_i) \quad = \quad \overline{u}(p_f)\left[\frac{(p_i + p_f)^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}(p_f - p_i)_\nu}{2m}\right]u(p_i)\,.$$

Aufgabe 3: Harmonischer Oszillator im zeitabhängigen Potential

(7+3=10 Punkte)

Betrachten Sie ein System mit dem Hamiltonoperator

$$H_0 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\,.$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das System im ersten angeregten Zustand. Es sei der zeitabhängigen Störung

$$H' = \begin{cases} 0 & t < 0 \text{ und } t > T \\ \lambda x\,(1 - t/T) & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

ausgesetzt. Verwenden Sie zur Lösung der Aufgabe Störungstheorie bis zur ersten Ordnung in λ.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System nach der Zeit $t > T$ im Grundzustand befindet.

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System nach der Zeit $t > T$ im dritten angeregten Zustand befindet.

Aufgabe 4: Spins im Magnetfeld

(6+4=10 Punkte)

Wir betrachten ein System von N nichtwechselwirkenden Spins mit ganzzahligen Spinquantenzahlen J $(m = -J, \ldots, +J)$ und magnetischem Moment μ_0 in einem Magnetfeld B.

(a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z_K. Zeigen Sie, dass Z_K in die Einteilchen-Zustandssummen faktorisiert und bestimmen Sie daraus die freie Energie $F(T)$. Ihr Ergebnis für die kanonische Zustandssumme sollte die Form $Z_k = (\sinh(c_1 B)/$

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System nach der Zeit $t > T$ im dritten angeregten Zustand befindet.

Aufgabe 4: Spins im Magnetfeld (6+4=10 Punkte)

Wir betrachten ein System von N nichtwechselwirkenden Spins mit ganzzahligen Spinquantenzahlen J ($m = -J, \ldots, +J$) und magnetischem Moment μ_0 in einem Magnetfeld B.

(a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z_K. Zeigen Sie, dass Z_K in die Einteilchen-Zustandssummen faktorisiert und bestimmen Sie daraus die freie Energie $F(T)$. Ihr Ergebnis für die kanonische Zustandssumme sollte die Form $Z_k = (\sinh(c_1 B)/\sinh(c_2 B))^N$ haben, mit Konstanten c_1, c_2.
Hinweis: Die Einteilchen-Energie ist gegeben durch $-\mu_0 B m_i$.

(b) Berechnen Sie die Magnetisierung M für gegebenes J in Abhängigkeit von der Temperatur. In Ihrem Ergebnis soll nur die Funktion coth vorkommen.

Nützliche Formeln und Definitionen

$\sum_{n=0}^{N} a^n = (1 - a^{N+1})/(1-a)$

γ-Matrizen in Dirac-Darstellung: $\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$, $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$

Pauli Matrizen: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Es gilt: $\sigma_k \sigma_l = \delta_{kl} + i\epsilon_{klj}\sigma_j$, $\beta = \gamma^0$, $\alpha^i = \gamma^0\gamma^i$

Auf- und Absteigeoperatoren beim Harmonischer Oszillator:
$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{i}{m\omega}p\right)$, $a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{i}{m\omega}p\right)$ mit $a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$, $a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$

Störungstheorie 1. Ordnung: $A = \frac{1}{i\hbar}\int\limits_0^t \mathrm{d}t' e^{i(E_n - E_m)t'/\hbar}\langle n\,|V(t')|\,m\rangle$
