Karlsruher Institut für Technologie — Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik II (WS 2024/25)

Prof. Dr. A. Shnirman
Adrian Reich

Klausur Nr. 1
18.02.2025

---

1. Zeitabhängige Störung (10 Punkte)

Der Hamiltonoperator eines eindimensionalen harmonischen Oszillators lautet

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2. \tag{1}$$

Zudem wirke eine zeitabhängige Störung $V(t)$ mit

$$V(t) = \lambda\sqrt{2m\hbar\omega^3}\, x\, e^{-|t|/\tau} \tag{2}$$

wobei $\lambda \ll 1$ und $\tau > 0$ eine Zeitskala ist. Der gesamte Hamiltonoperator laute also $H(t) = H_0 + V(t)$. Für $t \to -\infty$ befinde sich das System im Grundzustand ($n = 0$).

a) Bestimmen Sie in Störungstheorie erster Ordnung in λ die Wahrscheinlichkeit, dass das System für $t \to +\infty$ in den ersten angeregten Zustand ($n = 1$) übergeht. (6 Punkte)

b) Bestimmen Sie in Störungstheorie **zweiter** Ordnung in λ die Wahrscheinlichkeit, dass das System für $t \to +\infty$ in den zweiten angeregten Zustand ($n = 2$) übergeht. (4 Punkte)

Hinweis: Es ist nützlich, den Hamiltonoperator durch Auf- und Absteigeoperatoren, $a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x - \frac{i}{m\omega}p)$, $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x + \frac{i}{m\omega}p)$, auszudrücken.

Lösungsvorschlag

a) Wir bezeichnen mit $|n\rangle, n = 0, 1, 2, \ldots$ die Energieeigenzustände von H_0 mit $H_0|n\rangle = \hbar\omega(n+1/2)|n\rangle$. Es ist $|\psi(t \to -\infty)\rangle = |0\rangle$. In erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie, lautet der Zustand im Wechselwirkungsbild zur Zeit t

$$|\psi_I(t)\rangle \simeq \left(1 - \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt' V_I(t')\right)|0\rangle \tag{3}$$

mit

$$V_I(t) = e^{iH_0t/\hbar}V(t)e^{-iH_0t/\hbar}. \tag{4}$$

Wir nutzen im Folgenden

$$e^{-iH_0t/\hbar}|n\rangle = e^{-i\omega(n+1/2)t}|n\rangle \tag{5}$$

sowie

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a) \tag{6}$$

mit den Leiteroperatoren a und $a^\dagger$, die wie folgt wirken

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle. \tag{7}$$

Wir finden damit

$$e^{iH_0t/\hbar}xe^{-iH_0t/\hbar}\left|0\right\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}e^{i\omega t}\left|1\right\rangle . \tag{8}$$

Also gilt

$$\left|\psi_I(t\to\infty)\right\rangle = \left|0\right\rangle - i\lambda\omega\left(\int_{-\infty}^{0} dt' e^{(1/\tau+i\omega)t'} + \int_{0}^{\infty} dt' e^{-(1/\tau-i\omega)t'}\right)\left|1\right\rangle \tag{9}$$

$$= \left|0\right\rangle - 2i\lambda\,\frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}\left|1\right\rangle . \tag{10}$$

Die Wahrscheinlichkeit, das System für $t\to\infty$ im ersten angeregten Zustand vorzufinden, lautet damit

$$P_{0\to 1} = \left|\left\langle 1|\psi_I(t\to\infty)\right\rangle\right|^2 = 4\lambda^2\frac{\omega^2\tau^2}{(1+\omega^2\tau^2)^2}. \tag{11}$$

b) In der Dyson-Reihe, die uns den Zustand im Wechselwirkungsbild zur Zeit t liefert, berücksichtigen wir nun zusätzlich den Term zweiter Ordnung

$$\left|\psi_I(t)\right\rangle = \mathcal{T}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt'\,V_I(t')\right)\left|0\right\rangle \tag{12}$$

$$\simeq \left(1 - \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt'\,V_I(t') - \frac{1}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt''\,V_I(t')V_I(t'')\right)\left|0\right\rangle . \tag{13}$$

Wir wissen aus Aufgabenteil a) bereits, dass der Term erster Ordnung $\propto \left|1\right\rangle$ ist und damit zu dem Übergang in den Zustand $\left|2\right\rangle$ keinen Beitrag liefert. Es ist dann

$$\left\langle 2|\psi_I(t\to\infty)\right\rangle = -\frac{1}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt''\ \left\langle 2\right| V_I(t')V_I(t'')\left|0\right\rangle \tag{14}$$

$$= -\lambda^2\omega^2\int_{-\infty}^{\infty} dt'\,e^{-|t'|/\tau}\int_{-\infty}^{t'} dt''\,e^{-|t''|/\tau}\ \left\langle 2\right| e^{iH_0t'/\hbar}a^\dagger e^{-iH_0t'/\hbar}e^{iH_0t''/\hbar}a^\dagger e^{-iH_0t''/\hbar}\left|0\right\rangle ,$$

wobei wir für x jeweils nur die Aufsteigeoperatoren berücksichtigen müssen, um ein endliches Skalarprodukt zu erhalten. Wiederholtes Anwenden der in a) besprochenen Beziehungen liefert dann

$$\left\langle 2|\psi_I(t\to\infty)\right\rangle = -\sqrt{2}\lambda^2\omega^2\int_{-\infty}^{\infty} dt'\,e^{-|t'|/\tau+i\omega t'}\int_{-\infty}^{t'} dt''\,e^{-|t''|/\tau+i\omega t''} \tag{15}$$

$$= -\sqrt{2}\lambda^2\omega^2\left(\int_{-\infty}^{0} dt'\,e^{t'/\tau+i\omega t'}\int_{-\infty}^{t'} dt''\,e^{t''/\tau+i\omega t''} + \right. \tag{16}$$

$$\left. + \int_{0}^{\infty} dt'\,e^{-t'/\tau+i\omega t'}\int_{-\infty}^{0} dt''\,e^{t''/\tau+i\omega t''} + \int_{0}^{\infty} dt'\,e^{-t'/\tau+i\omega t'}\int_{0}^{t'} dt''\,e^{-t''/\tau+i\omega t''}\right)$$

$$= -\sqrt{2}\lambda^2\left(\frac{\omega^2\tau^2}{2(1+i\omega\tau)^2} + \frac{\omega^2\tau^2}{(1+i\omega\tau)(1-i\omega\tau)} + \frac{\omega^2\tau^2}{2(1-i\omega\tau)^2}\right) \tag{17}$$

$$= -2\sqrt{2}\lambda^2\frac{\omega^2\tau^2}{(1+\omega^2\tau^2)^2} \tag{18}$$

und die Übergangswahrscheinlichkeit lautet folglich

$$P_{0\to 2} = \left|\left\langle 2|\psi_I(t\to\infty)\right\rangle\right|^2 = 8\lambda^4\frac{\omega^4\tau^4}{(1+\omega\tau)^4}. \tag{19}$$

2. Dirac-Gleichung **(10 Punkte)**

Die Dirac-Gleichung ist gegeben durch

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\Psi = 0 \tag{20}$$

mit den vier Dirac-Matrizen γ^μ, die die folgende Algebra erfüllen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \tag{21}$$

$g^{\mu\nu}$ ist die Minkowski-Metrik.

a) Zeigen Sie, dass jede Lösung Ψ der Dirac-Gleichung auch eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung $(\hbar^2\partial_\mu\partial^\mu + m^2c^2)\Psi = 0$ ist. (3 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass $\partial_\mu j_A^\mu \propto i\bar{\Psi}\gamma_5\Psi$ mit $j_A^\mu = c\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi$ und bestimmen Sie die Proportionalitätskonstante. Dabei ist $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0$ und $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ erfüllt $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$. (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie (bis auf Normierungskonstanten) die vier linear unabhängigen Lösungen der Dirac-Gleichung bei einem gegebenen 3-Impuls $\vec{p}$. (4 Punkte)

Lösungsvorschlag

a) Wir multiplizieren die Dirac-Gleichung von links mit dem Operator $(-i\hbar\gamma^\nu\partial_\nu - mc)$, was uns liefert

$$(-i\hbar\gamma^\nu\partial_\nu - mc)(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\Psi = 0 \tag{22}$$

$$\Leftrightarrow (\hbar^2\gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\nu\partial_\mu + m^2c^2)\Psi = 0. \tag{23}$$

Es ist nun

$$\gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\nu\partial_\mu = \frac{1}{2}(\gamma^\nu\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu)\partial_\nu\partial_\mu = g^{\nu\mu}\partial_\nu\partial_\mu = \partial^\mu\partial_\mu, \tag{24}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass partielle Ableitungen vertauschen. Oben eingesetzt folgt direkt die Klein-Gordon-Gleichung.

b) Es gilt $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ sowie $\gamma^0\gamma^0 = 1$. Folglich liefert die adjungierte Dirac-Gleichung, wenn wir sie von rechts mit γ^0 multiplizieren und eine 1 einfügen

$$\left(-i\hbar(\partial_\mu\Psi^\dagger)(\gamma^0\gamma^0)\gamma^{\mu\dagger} - mc\Psi^\dagger\right)\gamma^0 = 0 \tag{25}$$

$$\Leftrightarrow -i\hbar\partial_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu - mc\bar{\Psi} = 0. \tag{26}$$

Für die Divergenz des Axialvektorstroms j_A^μ finden wir damit

$$\partial_\mu j_A^\mu = c\underbrace{(\partial_\mu\bar{\Psi})\gamma^\mu}_{=imc/\hbar\bar{\Psi}}\gamma_5\Psi - c\bar{\Psi}\gamma_5\underbrace{\gamma^\mu(\partial_\mu\Psi)}_{=-imc/\hbar\Psi} = i\frac{2mc^2}{\hbar}\bar{\Psi}\gamma_5\Psi, \tag{27}$$

die Proportionalitätskonstante ist also zwei mal die Ruheenergie (geteilt durch $\hbar$).

c) In der Dirac-Darstellung ist

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{28}$$

mit den Pauli-Matrizen $\vec{\sigma}$. Es ist deshalb nützlich, den vierkomponentigen Spinor Ψ in zwei zweikomponentige Spinoren aufzuteilen $\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$. Für diese liefert die Dirac-Gleichung dann

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t\varphi = c(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\chi + mc^2\varphi, \\ i\hbar\partial_t\chi = c(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\varphi - mc^2\chi, \end{cases} \tag{29}$$

woraus wir mit dem Ansatz $\varphi = \varphi_p e^{-ip_\mu x^\mu/\hbar}$, $\chi = \chi_p e^{-ip_\mu x^\mu/\hbar}$ mit dem 4-Impuls $p^\mu = (E/c, \vec{p})^T$ erhalten

$$\begin{cases} (E - mc^2)\varphi_p = c(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\chi_p, \\ (E + mc^2)\chi_p = c(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\varphi_p. \end{cases} \tag{30}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $\chi_p = c(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\varphi_p/(E + mc^2)$. Unter Ausnutzen von $(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) = \vec{p}^{\,2}$ sehen wir, dass die erste Gleichung damit für die relativistische Energie-Impuls-Beziehung $E^2 = c^2\vec{p}^{\,2} + m^2c^4$ identisch erfüllt ist. Insbesondere sehen wir, dass wir sowohl bei der Energie E als auch bei $-E$ eine Lösung finden. Die allgemeine Lösung lautet dann

$$\Psi = N e^{-ip_\mu x^\mu/\hbar} \begin{pmatrix} \varphi_p \\ \frac{c(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})}{E+mc^2}\varphi_p \end{pmatrix} \tag{31}$$

mit einer Normierungskonstanten N. Der zwei-komponentige Spinor φ_p ist hier frei wählbar, was zusammen mit der Freiheit in der Wahl des Vorzeichens von E vier linear unabhängige Lösungen ergibt.

3. Kanonische Zustandssumme **(10 Punkte)**

Wir betrachten ein System mit drei möglichen Ein-Teilchen-Zuständen. Die Energien der Ein-Teilchen-Zustände seien Spin-unabhängig und gegeben durch $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ sowie $\varepsilon_3 = \Delta$. Wir platzieren nun zwei (ununterscheidbare) Spin-$\frac{1}{2}$-Fermionen in dieses System.

a) Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme. Berücksichtigen Sie dabei auch die Spin-Entartung. (6 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Entropie $S(T)$ des Systems sowie den Erwartungswert der Energie $U(T)$ als Funktion der Temperatur T. Geben Sie jeweils die Grenzwerte für $T \to 0$ sowie $T \to \infty$ an. (4 Punkte)

Lösungsvorschlag

a) Jedes der Teilchen hat zwei mögliche Spin-Projektionen. Effektiv haben wir also 6 Zustände (4 davon mit Energie 0, 2 mit Energie Δ) auf die wir die 2 Teilchen verteilen müssen. Die Gesamtenergie ist die Summe der Ein-Teilchen-Energien. Da es sich um Fermionen handelt, dürfen sie allerdings nicht den gleichen Zustand besetzen.

Wie viele Zwei-Teilchen-Zustände gibt es also insgesamt? Das erste Teilchen ist in einem von 6 Zuständen, das zweite in einem der übrigen 5. Da die Teilchen ununterscheidbar sind und die Reihenfolge damit egal ist, teilen wir noch durch 2 und erhalten somit $6 \cdot 5\,/\,2 = \binom{6}{2} = 15$ Zwei-Teilchen-Zustände.

Nach der gleichen Logik gibt es $4 \cdot 3/2 = 6$ Zwei-Teilchen-Zustände mit der Energie $E_0 = 0$, nur einen mit der Energie $E_2 = 2\Delta$ und folglich $15 - 6 - 1 = 8$ Zustände mit der Energie $E_1 = \Delta$. Die kanonische Zustandssumme lautet damit

$$Z = \sum_\lambda e^{-\beta E_\lambda} = 6 + 8e^{-\beta\Delta} + e^{-2\beta\Delta}. \tag{32}$$

b) Die freie Energie ergibt sich aus

$$F(T) = -k_B T \ln Z = -k_B T \ln\left(6 + 8e^{-\beta\Delta} + e^{-2\beta\Delta}\right) \tag{33}$$

und daraus finden wir die Entropie mittels

$$S(T) = -\frac{\partial F}{\partial T} = k_B \ln\left(6 + 8e^{-\beta\Delta} + e^{-2\beta\Delta}\right) + \frac{2\Delta}{T}\frac{4e^{-\beta\Delta} + e^{-2\beta\Delta}}{6 + 8e^{-\beta\Delta} + e^{-2\beta\Delta}}. \tag{34}$$

Es ist

$$S(T \to 0) = k_B \ln(6), \quad S(T \to \infty) = k_B \ln(15). \tag{35}$$

Der Erwartungswert der Energie ist die innere Energie mit

$$U(T) = F + TS = 2\Delta\frac{4e^{-\beta\Delta} + e^{-2\beta\Delta}}{6 + 8e^{-\beta\Delta} + e^{-2\beta\Delta}}. \tag{36}$$

Die gesuchten Grenzwerte lauten

$$U(T \to 0) = 0, \quad U(T \to \infty) = \frac{2\Delta}{3}. \tag{37}$$

4. Bose-Einstein-Kondensation **(10 Punkte)**

Wir betrachten nicht-wechselwirkende Bosonen im 3-dimensionalen Volumen V mit der Dispersionsrelation $\varepsilon(\vec{p}) = \alpha|\vec{p}|^\kappa$ $(\alpha, \kappa > 0)$ bei einer Temperatur $T > 0$.

a) Berechnen Sie die Zustandsdichte $\nu(\varepsilon)$. (3 Punkte)

b) Geben Sie mithilfe der Zustandsdichte einen Ausdruck für die Teilchenzahldichte $n(T, V, \mu)$ an und bestimmen Sie damit die Werte von κ, für die bei niedrigen Temperaturen Bose-Einstein-Kondensation stattfindet. (7 Punkte)
Hinweis: Die auftretenden Integrale brauchen Sie dafür nicht explizit zu lösen.

Lösungsvorschlag

a) Die Zustandsdichte lautet

$$\nu(\varepsilon) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\delta(\varepsilon - \varepsilon(\vec{p})) = \frac{1}{2\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty dp\, p^2 \delta(\varepsilon - \alpha p^\kappa) \tag{38}$$

$$= \frac{1}{2\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty d\zeta\, \frac{\zeta^{3/\kappa-1}}{\kappa\alpha^{3/\kappa}}\delta(\varepsilon - \zeta) = \frac{1}{2\pi^2\hbar^3}\frac{\varepsilon^{3/\kappa-1}}{\kappa\alpha^{3/\kappa}}, \tag{39}$$

wobei wir die Substitution $\zeta = \alpha p^\kappa$ durchgeführt haben.

b) Die Teilchenzahldichte lässt sich mithilfe der Bose-Verteilung $n_B(\varepsilon)$ wie folgt ausdrücken

$$n(T, V, \mu) = n_0 + \int_0^\infty d\varepsilon\, \nu(\varepsilon) n_B(\varepsilon) = n_0 + \frac{1}{2\pi^2\hbar^3\kappa\alpha^{3/\kappa}}\int_0^\infty d\varepsilon\, \frac{\varepsilon^{3/\kappa-1}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}, \tag{40}$$

wobei $n_0 = (e^{-\beta\mu} - 1)^{-1}$ die Grundzustandsbesetzung ist.
Für kleiner werdende Temperaturen bei festem n wächst μ und damit der Integralausdruck. Allerdings ist μ nach oben durch die kleinste Ein-Teilchen-Energie beschränkt. Bose-Einstein-Kondensation liegt vor, wenn das Integral im Limes $\mu \to \varepsilon_{\text{min}} = 0$ konvergiert, also keine beliebig hohe Teilchenzahldichte bei endlichen Energien zulässt, sodass unterhalb einer kritischen Temperatur T_c eine makroskopische Besetzung des Grundzustands stattfinden muss. Dies ist hier genau dann der Fall, wenn $\kappa < 3$, da für $\varepsilon \to 0$ und $\mu = 0$ der Integrand proportional ist zu $\varepsilon^{3/\kappa-2}$. Das Integral konvergiert also, solange

$$\frac{3}{\kappa} - 2 > -1 \quad \Leftrightarrow \quad \kappa < 3. \tag{41}$$