

Moderne Theoretische Physik II (WS 2024/25)

Prof. Dr. A. Shnirman
Adrian ReichLösungen zu Klausur Nr. 2
27.03.2025

1. Zeitabhängige Störung

(10 Punkte)

Der ungestörte Hamiltonoperator eines Drei-Niveau-Systems in seiner Eigenbasis sei gegeben durch

$$H_0 = \hbar\omega \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Zum Zeitpunkt $t = -\frac{\pi}{2\omega}$ werde eine Störung $V(t)$ ein- und zum Zeitpunkt $t = \frac{\pi}{2\omega}$ wieder ausgeschaltet, wobei

$$V(t) = \begin{cases} \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta_1 \\ 0 & 0 & \delta_2 \\ \delta_1 & \delta_2 & 0 \end{pmatrix}, & -\frac{\pi}{2\omega} \leq t \leq \frac{\pi}{2\omega}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (2)$$

mit $\delta_1, \delta_2 \ll 1$. Der gesamte Hamiltonoperator laute also $H(t) = H_0 + V(t)$. Für $t \rightarrow -\infty$ befinde sich das System im Grundzustand.

- Bestimmen Sie in Störungstheorie erster Ordnung die Wahrscheinlichkeit, dass das System für $t \rightarrow +\infty$ in den energetisch **höchsten** Zustand übergeht. (6 Punkte)
- Bestimmen Sie in Störungstheorie **zweiter** Ordnung die Wahrscheinlichkeit, dass das System für $t \rightarrow +\infty$ in den energetisch **mittleren** Zustand übergeht. (4 Punkte)

Lösungsvorschlag

- Wir bezeichnen die drei Eigenzustände mit $|1\rangle = (1, 0, 0)^T$, $|2\rangle = (0, 1, 0)^T$, $|3\rangle = (0, 0, 1)^T$. Es ist $|\psi(t \rightarrow -\infty)\rangle = |1\rangle$. In erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie, lautet der Zustand im Wechselwirkungsbild zur Zeit t

$$|\psi_I(t)\rangle \simeq \left(1 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' V_I(t')\right) |1\rangle \quad (3)$$

mit

$$V_I(t) = e^{iH_0 t/\hbar} V(t) e^{-iH_0 t/\hbar}. \quad (4)$$

Es gilt folglich

$$|\psi_I(t \rightarrow \infty)\rangle = |1\rangle - i\omega \int_{-\pi/2\omega}^{\pi/2\omega} dt' e^{iH_0 t'/\hbar} \tilde{V} e^{-iH_0 t'/\hbar} |1\rangle, \quad (5)$$

wobei wir mit $\tilde{V}$ die Matrix in Gl. (2) bezeichnen, und damit

$$\langle 3|\psi_I(t \rightarrow \infty)\rangle = -i\omega \int_{-\pi/2\omega}^{\pi/2\omega} dt' \langle 3| e^{iH_0 t'/\hbar} \tilde{V} e^{-iH_0 t'/\hbar} |1\rangle \quad (6)$$

$$= -i\omega \int_{-\pi/2\omega}^{\pi/2\omega} dt' e^{3i\omega t'} \langle 3| \tilde{V} |1\rangle = \frac{2i}{3} \delta_1. \quad (7)$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit ergibt sich also zu $P_{1 \rightarrow 3} \simeq |\langle 3|\psi_I(t \rightarrow \infty)\rangle|^2 = \frac{4}{9} \delta_1^2$.

- b) In der Dyson-Reihe, die uns den Zustand im Wechselwirkungsbild zur Zeit t liefert, berücksichtigen wir nun zusätzlich den Term zweiter Ordnung

$$|\psi_I(t)\rangle = \mathcal{T} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' V_I(t') \right) |1\rangle \quad (8)$$

$$\simeq \left(1 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' V_I(t') - \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' V_I(t') V_I(t'') \right) |1\rangle. \quad (9)$$

Wir wissen aus Aufgabenteil a) bereits, dass der Term erster Ordnung $\propto |3\rangle$ ist und damit zu dem Übergang in den Zustand $|2\rangle$ keinen Beitrag liefert.

Es ist dann

$$\langle 2|\psi_I(t \rightarrow \infty)\rangle = -\omega^2 \int_{-\pi/2\omega}^{\pi/2\omega} dt' \int_{-\pi/2\omega}^{t'} dt'' \langle 2| e^{iH_0 t'/\hbar} \tilde{V} e^{-iH_0 t'/\hbar} e^{iH_0 t''/\hbar} \tilde{V} e^{-iH_0 t''/\hbar} |1\rangle \quad (10)$$

$$= -\omega^2 \int_{-\pi/2\omega}^{\pi/2\omega} dt' \int_{-\pi/2\omega}^{t'} dt'' e^{i\omega t'} e^{i\omega t''} \langle 2| \tilde{V} e^{-iH_0 t'/\hbar} e^{iH_0 t''/\hbar} \tilde{V} |1\rangle \quad (11)$$

$$= -\omega^2 \delta_1 \delta_2 \int_{-\pi/2\omega}^{\pi/2\omega} dt' \int_{-\pi/2\omega}^{t'} dt'' e^{-i\omega t'} e^{3i\omega t''} = \frac{2}{3} \delta_1 \delta_2 \quad (12)$$

und damit lautet die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P_{1 \rightarrow 2} \simeq |\langle 2|\psi_I(t \rightarrow \infty)\rangle|^2 = \frac{4}{9} (\delta_1 \delta_2)^2$.

2. Dirac-Gleichung

(10 Punkte)

Wir betrachten ein Teilchen mit Ladung q im elektromagnetischen Feld A^μ , das beschrieben wird durch die Dirac-Gleichung

$$\left[\gamma^\mu (i\hbar \partial_\mu - \frac{q}{c} A_\mu) - mc \right] \Psi = 0. \quad (13)$$

Die vier Dirac-Matrizen γ^μ erfüllen folgende Algebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (14)$$

$g^{\mu\nu}$ ist die Minkowski-Metrik. Zudem gilt $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$.

- Es sei $\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma_0$. Welcher Gleichung genügt $\bar{\Psi}$? (2 Punkte)
- Berechnen Sie $\partial_\mu j^\mu$ sowie $\partial_\mu j_A^\mu$ für die Ströme $j^\mu = c\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ und $j_A^\mu = c\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi$. Dabei erfüllt $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ die Beziehung $\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$. (4 Punkte)
- Zeigen Sie, dass $\Psi^c = U_C\Psi^*$ die Dirac-Gleichung mit entgegengesetztem Vorzeichen der Ladung $q \rightarrow -q$ erfüllt. Dabei genügt die unitäre Matrix U_C der Relation $U_C(\gamma^\mu)^*U_C^{-1} = -\gamma^\mu$. (4 Punkte)

Lösungsvorschlag

- Wir adjungieren die Dirac-Gleichung, multiplizieren sie von rechts mit γ^0 und fügen an zwei Stellen eine 1 ein,

$$\left(-i\hbar(\partial_\mu\Psi^\dagger)(\gamma^0\gamma^0)\gamma^{\mu\dagger} - \frac{q}{c}A_\mu\Psi^\dagger(\gamma^0\gamma^0)(\gamma^\mu)^\dagger - mc\Psi^\dagger \right) \gamma^0 = 0 \quad (15)$$

$$\Leftrightarrow -i\hbar\partial_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu - \frac{q}{c}A_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu - mc\bar{\Psi} = 0. \quad (16)$$

- Es ist

$$\partial_\mu j^\mu = c(\partial_\mu\bar{\Psi})\gamma^\mu\Psi + c\bar{\Psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\Psi). \quad (17)$$

Aus der Dirac-Gleichung folgt

$$\gamma^\mu\partial_\mu\Psi = -\frac{i}{\hbar}\left(\frac{q}{c}\gamma^\mu A_\mu + mc\right)\Psi, \quad (18)$$

$$\partial_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu = \frac{i}{\hbar}\left(\frac{q}{c}A_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu + mc\bar{\Psi}\right), \quad (19)$$

und eingesetzt ergibt sich

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{ic}{\hbar} \left(\frac{q}{c}A_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi + mc\bar{\Psi}\Psi - \frac{q}{c}A_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi - mc\bar{\Psi}\Psi \right) = 0. \quad (20)$$

Entsprechend finden wir

$$\partial_\mu j_A^\mu = \frac{ic}{\hbar} \left(\frac{q}{c}A_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi + mc\bar{\Psi}\gamma_5\Psi + \frac{q}{c}A_\mu\bar{\Psi}\gamma_5\gamma^\mu\Psi + mc\bar{\Psi}\gamma_5\Psi \right) \quad (21)$$

$$= i\frac{2mc^2}{\hbar}\bar{\Psi}\gamma_5\Psi. \quad (22)$$

- Das komplex Konjugierte der Dirac-Gleichung ist

$$\left[(\gamma^\mu)^*(-i\hbar\partial_\mu - \frac{q}{c}A_\mu) - mc \right] \Psi^* = 0 \quad (23)$$

Wir fügen eine 1 ein und multiplizieren von links mit U_C

$$U_C \left[(\gamma^\mu)^*(-i\hbar\partial_\mu - \frac{q}{c}A_\mu) - mc \right] U_C^{-1}U_C\Psi^* = 0 \quad (24)$$

$$\Leftrightarrow \left[(-\gamma^\mu)(-i\hbar\partial_\mu - \frac{q}{c}A_\mu) - mc \right] \Psi^c = \left[\gamma^\mu(i\hbar\partial_\mu + \frac{q}{c}A_\mu) - mc \right] \Psi^c = 0, \quad (25)$$

was, wie gefordert, die Dirac-Gleichung ist mit $q \rightarrow -q$.

3. Kanonische Zustandssumme

(10 Punkte)

Wir betrachten ein System mit zwei möglichen Ein-Teilchen-Zuständen. Die Energien der Ein-Teilchen-Zustände seien Spin-unabhängig und gegeben durch $\varepsilon_1 = 0$ sowie $\varepsilon_2 = \Delta$. Wir platzieren nun zwei (ununterscheidbare) Spin-1-Bosonen in dieses System.

- a) Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme. Berücksichtigen Sie dabei auch die Spin-Entartung. (6 Punkte)
- b) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Energie $U(T)$ des Systems als Funktion der Temperatur T . Geben Sie die Grenzwerte für $T \rightarrow 0$ sowie $T \rightarrow \infty$ an. (4 Punkte)

Lösungsvorschlag

- a) Jedes der Teilchen hat drei mögliche Spin-Projektionen. Effektiv haben wir also 6 Ein-Teilchen-Zustände (3 davon mit Energie 0, 3 mit Energie Δ) auf die wir die 2 Teilchen verteilen müssen. Die Gesamtenergie ist die Summe der Ein-Teilchen-Energien. Da es sich um Bosonen handelt, dürfen sie auch den gleichen Zustand besetzen.

Wie viele Zwei-Teilchen-Zustände gibt es also insgesamt? 6 Zustände, bei denen die Teilchen jeweils den gleichen Ein-Teilchen-Zustand besetzen, plus $6 \cdot 5/2 = 15$ Zustände, in denen sie unterschiedliche Ein-Teilchen-Zustände besetzen (die 2 kompensiert Doppelzählungen aufgrund der Ununterscheidbarkeit), also 21 Zwei-Teilchen-Zustände insgesamt.

Mit der gleichen Logik sehen wir, dass es jeweils $3 + (3 \cdot 2)/2 = 6$ Zustände mit Energie 0 und mit Energie 2Δ gibt, sodass die übrigen $9 (= 3 \cdot 3)$ die Energie Δ haben. Die kanonische Zustandssumme lautet damit

$$Z(T) = 6 + 9 e^{-\beta\Delta} + 6 e^{-2\beta\Delta}. \quad (26)$$

- b) Zunächst lautet die freie Energie $F(T) = -k_B T \ln(Z(T))$. Daraus ergibt sich die Entropie mit $S(T) = -\partial F / \partial T$ und die gesuchte innere Energie lautet

$$U = F + TS = \Delta \frac{9 e^{-\beta\Delta} + 12 e^{-2\beta\Delta}}{6 + 9 e^{-\beta\Delta} + 6 e^{-2\beta\Delta}}. \quad (27)$$

(Bzw. ergibt sich das auch direkt mit $U = -\partial(\ln Z) / \partial \beta$.) Die Grenzwerte sind

$$U(T \rightarrow 0) = 0, \quad U(T \rightarrow \infty) = \Delta. \quad (28)$$

4. Fermigas in zwei Dimensionen

(10 Punkte)

Wir betrachten $N \gg 1$ nicht-wechselwirkende Spin- $\frac{1}{2}$ -Fermionen im 2-dimensionalen Volumen V mit der Dispersionsrelation $\varepsilon(\vec{p}) = \alpha|\vec{p}|^2$ ($\alpha > 0$).

- Berechnen Sie die Zustandsdichte $\nu(\varepsilon)$. Bestimmen Sie anschließend die Fermienergie E_F sowie die innere Energiedichte $U_{T=0}/V$ bei der Temperatur $T = 0$ als Funktion der Teilchendichte $n = N/V$. (6 Punkte)
- Geben Sie einen Ausdruck für das großkanonische Potential $\Omega(T, V, \mu)$ bei einer beliebigen Temperatur T als Integral über die Ein-Teilchen-Energien ε an und bestimmen Sie die Entropie $S(T, V, \mu)$. (4 Punkte)

Bonus: Zeigen Sie, dass $\Omega(T, V, \mu) = -U(T, V, \mu)$. (4 Bonuspunkte)

Lösungsvorschlag

- Aus $\nu(\varepsilon)d\varepsilon = 2p \frac{dp}{2\pi\hbar^2}$, wobei der Faktor 2 die Spin-Entartung berücksichtigt, folgt mit $d\varepsilon/dp = 2\alpha p$ für die Zustandsdichte $\nu(\varepsilon) = 1/(2\pi\alpha\hbar^2)$. Die Teilchenzahl lässt sich nun schreiben als

$$N = V \int_0^{E_F} d\varepsilon \nu(\varepsilon) = V \frac{E_F}{2\pi\alpha\hbar^2}, \quad (29)$$

woraus folgt $E_F = 2\pi\alpha\hbar^2 n$.

Schließlich finden wir die innere Energiedichte bei $T = 0$ mittels

$$U_{T=0}/V = \int_0^{E_F} d\varepsilon \nu(\varepsilon) \varepsilon = \pi\alpha\hbar^2 n^2. \quad (30)$$

- Das großkanonische Potential lautet

$$\Omega(T, V, \mu) = -k_B T V \int_0^\infty d\varepsilon \nu(\varepsilon) \ln(1 + e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}) = -\frac{k_B T V}{2\pi\alpha\hbar^2} \int_0^\infty d\varepsilon \ln(1 + e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}). \quad (31)$$

Die Entropie ergibt sich daraus mit

$$S = -\frac{\partial \Omega}{\partial T} \Big|_{V, \mu} = -\frac{\Omega}{T} + \frac{V}{2\pi\alpha\hbar^2 T} \int_0^\infty d\varepsilon (\varepsilon - \mu) n_F(\varepsilon) \quad (32)$$

mit der Fermi-Funktion n_F .

Bonus:

Für die innere Energie bei einer beliebigen Temperatur gilt

$$U(T, V, \mu) = V \int_0^\infty d\varepsilon \nu(\varepsilon) \varepsilon n_F(\varepsilon) = \frac{V}{2\pi\alpha\hbar^2} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon}{1 + e^{\beta(\varepsilon-\mu)}}. \quad (33)$$

Wir schreiben das Integral im obigen Ausdruck für Ω nun als

$$\int_0^\infty d\varepsilon 1 \cdot \ln(1 + e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}) \quad (34)$$

und nutzen partielle Integration, um zu finden

$$\int_0^\infty d\varepsilon 1 \cdot \ln(1 + e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}) = \varepsilon \ln(1 + e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon \frac{-\beta e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}}{1 + e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}} \quad (35)$$

$$= 0 + \frac{1}{k_B T} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon}{1 + e^{\beta(\varepsilon-\mu)}}. \quad (36)$$

Oben eingesetzt sehen wir direkt $\Omega = -U$.