Klausur zur Vorlesung
Moderne Theoretische Physik II
(Quantenmechanik II und Statisik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Daniel Stremmer **WS 25/26**

Bearbeitungsdauer:	90 Minuten	24.02.2026
Hilfsmittel:	Ein eigenhändig beschriebenes DIN A4 Blatt.	
Wichtig:	Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.	

Nachname: Gruppe:

Vorname:

Matrikelnummer:

A1	A2	A3	A4	Summe

Aufgabe 1: Kurzaufgaben **($2+2+2+2+2=10$ Punkte)**

a) Die freie Energie eines System ist gegeben durch $F = -NkT\log(2\cosh(\beta\mu_B B))$, wobei μ_B das Bohrsche Magneton ist. Berechnen Sie die Entropie.

solution

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = Nk\left(\log(2\cosh(\beta\mu_B B) - (\beta\mu_B B)\tanh(\beta\mu_B B)\right)$$

b) Zeigen Sie, dass der Diracstrom $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ erhalten ist.

solution

With

$$(i\not{\partial} - q\not{A} - m)\psi = 0,$$
$$\bar{\psi}(i\overleftarrow{\not{\partial}} + q\not{A} + m) = 0,$$

we get

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = \left(\bar{\psi}\overleftarrow{\not{\partial}}\right)\psi + \bar{\psi}\not{\partial}\psi = -i\bar{\psi}\left(q\not{A} + m\right)\psi - i\bar{\psi}\left(-q\not{A} - m\right)\psi = 0$$

c) Zeigen Sie, dass die Emission eines Photons mit 4-Impuls k^μ durch ein freies Elektorn aus Gründen der 4-Impulserhaltung nicht möglich ist.

solution

$$\begin{aligned} m_e^2 = p_e^2 &= (p'_e + k)^2 \\ &= m_e^2 + 2(E'_e E_\gamma - |\vec{p}'_e| E_\gamma \cos\theta) \\ &\geq m_e^2 + 2E'_e E_\gamma \left(1 - \frac{|\vec{p}'_e|}{E_e}\right) \\ &> m_e^2, \end{aligned}$$

where we used four momentum conservation in the first line.

d) Berechnen Sie $\gamma^\mu \gamma_\mu$.

solution

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left([\gamma^\mu, \gamma^\nu] + \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \right) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} 2 g^{\mu\nu} = 4$$

e) Zeigen Sie, dass $\gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu = 4a \cdot b$.

solution

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu &= a_\nu b_\rho \gamma_\mu (\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu) \\ &= a_\nu b_\rho \gamma_\mu (-\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho + 2\gamma^\nu g^{\rho\mu}) \\ &= \ldots = 4a \cdot b \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Drei-Niveau-System mit zeitabhängiger Störung (10 **Punkte**)

Wir betrachten ein System, dass durch folgenden Hamiltonoperator beschrieben wird

$$H_0 = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Das System befindet sich zur Zeit $t = -\infty$ im Grundzustand. Betrachten Sie nun eine Störung mit folgender Form

$$H' = \hbar\omega \Theta(t) \Theta\left(\frac{\pi}{\omega} - t\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix},$$

und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass das System zur Zeit $t = \infty$ im ersten oder im zweiten angeregeten Zustand zu finden ist. Bestimmen Sie in beiden Fällen die erste nicht verschwindene Ordnung in zeitabhängiger Störungstheorie.

Solution

For the most energetic we have

$$A_{3,1}^{(1)} = -\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \langle 3|H'|1\rangle \exp\left(i\frac{E_3 - E_1}{\hbar}t'\right) = \frac{2}{5}a$$

Therefore, the probability that the system is in the third state is given by

$$\left|A_{3,1}^{(1)}\right|^2 = \frac{4}{25}a^2$$

Next we consider the middle energy level (state 2), where the first order vanishes:

$$A_{2,1}^{(1)} = -\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \langle 2|H'|1\rangle \exp\left(i\frac{E_2 - E_1}{\hbar}t'\right) = 0,$$

because of $\langle 2|H'|1\rangle = 0$. Therefore, we have to consider the next order:

$$c_2 = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \Sigma_m \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \langle 2|H'|m\rangle \exp\left(i\frac{E_2 - E_m}{\hbar}t'\right) \int_{-\infty}^{t'} \mathrm{d}t'' \langle m|H'|1\rangle \exp\left(i\frac{E_m - E_1}{\hbar}t''\right).$$

Because of the structure of the matrix H', only $m = 3$ leads to a non-vanishing contribution:

$$A_{2,1}^{(1)} = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 ab\hbar^2\omega^2 \int_0^{\pi/\omega} \mathrm{d}t' \exp\left(-2i\omega t'\right) \int_0^{t'} \mathrm{d}t'' \exp\left(5i\omega t''\right) = \frac{2ab}{15}.$$

The probability is then given by

$$\left|A_{2,1}^{(1)}\right|^2 = \frac{4}{225}a^2b^2.$$

Aufgabe 3: Räumliche Drehungen im Spinorraum ($5 + 5 = 10$ **Punkte**)

Lorentztransformationen im Spinorraum sind gegeben durch

$$S_R = \exp\left(\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right),$$

wobei $\omega_{\mu\nu}$ die infinitesimalen Parametern der Lorentzgruppe sind. Für eine Drehung um die z-Achse mit Winkel ϕ sind die einzigen nicht verschwindenen Parameter gegeben durch $\omega_{12} = -\omega_{21} = \phi$.

a) Zeigen Sie, dass die Lorentztransformation im Spinorraum für eine Drehung mit den Winkel ϕ um die z-Achse geschrieben werden kann als

$$S_R = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + i\sigma_{12}\sin\left(\frac{\phi}{2}\right).$$

Solution

The rotation matrix is given by

$$S_R = \exp\left(\frac{i}{2}\phi\sigma_{12}\right),$$

where we used $\omega_{12} = -\omega_{21} = \phi$. Next we show that $\sigma_{12}^2 = 1$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{12} &= \frac{i}{2}[\gamma_1, \gamma_2] = \frac{i}{2}(\gamma_1\gamma_2 - \gamma_2\gamma_1) = i\gamma_1\gamma_2 \\
\sigma_{12}^2 &= -\gamma_1\gamma_2\gamma_1\gamma_2 = \gamma_1\gamma_1\gamma_2\gamma_2 = 1.
\end{aligned}$$

Finally, the rotation matrix is given by

$$\begin{aligned}
S_R = \exp\left(\frac{i}{2}\phi\sigma_{12}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i\phi\sigma_{12}}{2}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{i\phi\sigma_{12}}{2}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{i\phi\sigma_{12}}{2}\right)^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^{2n} + i\sigma_{12}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^{2n+1} \\
&= \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + i\sigma_{12}\sin\left(\frac{\phi}{2}\right).
\end{aligned}$$

b) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass $S_R^{-1}\gamma_j S_R = (D_z)_{ji}\gamma_i$ gilt, wobei D_z die gleiche Drehung im Ortsraum beschreibt und gegeben ist durch

$$D_z = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution

With

$$S_R^{-1} = \cos(\phi/2) - i\sigma_{12}\sin(\phi/2),$$

we calculate

$$\begin{aligned} S_R^{-1}\gamma_j S_R &= \left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i\sigma_{12}\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)\gamma_j\left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + i\sigma_{12}\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right) \\ &= \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\gamma_j + i\left[\gamma_j,\sigma_{12}\right]\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\sigma_{12}\gamma_j\sigma_{12}. \end{aligned}$$

The two products of gamma matrices can be simplified as

$$[\gamma_j,\sigma_{12}] = 2i(g_{j1}\gamma_2 - g_{j2}\gamma_1),$$

and

$$\sigma_{12}\gamma_j\sigma_{12} = \gamma_j + 2(g_{j1}\gamma_1 + g_{j2}\gamma_2).$$

Lastly we calculate explicitly the expression for the different values of j

$$\begin{aligned} &S_R^{-1}\gamma_1 S_R = \gamma_1\left[\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right] + 2\gamma_2\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = \gamma_1\cos(\phi) + \gamma_2\sin(\phi) \\ &S_R^{-1}\gamma_2 S_R = \ldots = \gamma_2\cos(\phi) - \gamma_1\sin(\phi) \\ &S_R^{-1}\gamma_3 S_R = \ldots = \gamma_3. \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Dichteoprator eines freien Teilchens $(4+2+4=10$ **Punkte)**

Betrachten Sie den Dichteoperator $\rho = e^{-\beta H}/\mathrm{Tr}(e^{-\beta H})$ für ein freies Teilchen $(H = \vec{p}^{\,2}/(2m))$, das sich in einem Kasten mit Volumen V befindet.

a) Berechnen Sie die Zustandssumme und zeigen Sie, dass nach dem thermodynamischen Grenzwert die Zustandssumme gegeben ist durch

$$Z = V/\lambda^3 \qquad \text{mit} \qquad \lambda = \sqrt{\frac{2\pi\beta\hbar^2}{m}}.$$

solution

We can write the density operator as

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{\mathrm{Tr}\left[e^{-\beta H}\right]}.$$

For a free particle we have $H|\Psi_{\vec{p}}\rangle = \frac{\vec{p}^2}{2m}|\Psi_{\vec{p}}\rangle$. Since we assume that the particle is in a box with volume $V = L^3$, we can write the wave functions as $\langle\vec{x}|\Psi_{\vec{p}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}$ with $\vec{p} = \frac{2\pi\hbar}{L}\left(n_x, n_y, n_z\right)^T$. The wavefunctions are orthonormal

$$\langle\Psi_{\vec{p}}|\Psi_{\vec{p}}\rangle = \delta_{\vec{p},\vec{p}'},$$

and are a complete set of basis functions:

$$\sum_{\vec{k}} \Psi^*_{\vec{p}}(\vec{x}')\Psi_{\vec{p}}(\vec{x}) = \delta(\vec{x}' - \vec{x}).$$

The partition function can the be calculated as

$$Z = \mathrm{Tr}\left[e^{-\beta H}\right] = \sum_{\vec{p}}\langle\Psi_{\vec{p}}|e^{-\beta H}|\Psi_{\vec{p}}\rangle = \sum_{\vec{p}} e^{-\frac{\beta\vec{p}^2}{2m}}.$$

Next, we write the sum as in integral over $\vec{k}$ and obtain

$$Z = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\int \mathrm{d}^3p\; e^{-\frac{\beta\vec{p}^2}{2m}} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{V}{\lambda^3}.$$

b) Bestimmen Sie die Matrixelemente $\langle\psi_{\vec{p}'}|\rho|\psi_{\vec{p}}\rangle$, wobei $\psi_{\vec{p}}$ die orthornormalen Eigenfunktionen des Hamiltonoperators sind.

solution

The density operator in momentum space is then given by

$$\langle\Psi_{\vec{p}'}|\rho|\Psi_{\vec{p}}\rangle = \frac{\lambda^3}{V}e^{-\frac{\beta\vec{p}^2}{2m}}\delta_{\vec{p},\vec{p}'}.$$

c) Berechnen Sie damit die Matrixelements im Ortsraum $\langle\vec{x}'|\rho|\vec{x}\rangle$.

solution

In order to obtain this expression in position space, we use this relation and get

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{x}'|\rho|\vec{x}\rangle &= \sum_{\vec{p}',\vec{p}} \langle \vec{x}'|\vec{p}'\rangle\langle \vec{p}'|\rho|\vec{p}\rangle\langle \vec{p}|\vec{x}\rangle \\
&= \sum_{\vec{p}',\vec{p}} \Psi_{\vec{p}'}(\vec{x}')\left(\frac{\lambda^3}{V} e^{-\frac{\beta\vec{p}^2}{2m}}\delta_{\vec{p},\vec{p}'}\right)\Psi^*_{\vec{p}}(\vec{x}) \\
&= \sum_{\vec{p}} \Psi_{\vec{p}}(\vec{x}')\left(\frac{\lambda^3}{V} e^{-\frac{\beta\vec{p}^2}{2m}}\right)\Psi^*_{\vec{k}}(\vec{x}) \\
&= \frac{\lambda^3}{V}\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int \mathrm{d}^3p\, e^{-\frac{\beta\vec{p}^2}{2m}+i\vec{p}(\vec{x}'-\vec{x})/\hbar} \\
&= \frac{1}{V} e^{-\frac{\pi(\vec{x}'-\vec{x})^2}{\lambda^2}}.
\end{aligned}
$$

Nützliche Formeln und Definitionen

γ-Matrizen in Dirac-Darstellung: $\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$

Sigma Matrizen: $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$

Störungstheorie 1. Ordnung: $A^{(1)}_{n,m} = \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' e^{i(E_n-E_m)t'/\hbar}\langle n\,|V(t')|\,m\rangle$

Störungstheorie 2. Ordnung:

$A^{(2)}_{n,m} = \frac{1}{(i\hbar)^2}\sum_k \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' e^{i(E_n-E_k)t'/\hbar}\langle n\,|V(t')|\,k\rangle \int_{t_0}^{t'} \mathrm{d}t'' e^{i(E_k-E_m)t''/\hbar}\langle k\,|V(t'')|\,m\rangle$

Wellenfunktion eines freien Teilchen im Kasten mit Volumen V: $\langle \vec{x}|\Psi_{\vec{p}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}$

mit $\vec{k} = \frac{2\pi\hbar}{L}(n_x, n_y, n_z)^T$, erfüllt übliche Orthonormalitäts- und Vollständigkeitsrelationen

Gauss-Integral: $\int \mathrm{d}^3p\, e^{-\alpha\vec{p}^2+i\beta\vec{p}\cdot\vec{x}} = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{3/2} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}\vec{x}^2}$

Thermodynamischer Grenzwert: $\sum_{\vec{p}} \to \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\int \mathrm{d}^3p$
