

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Hantian Zhang, Manuel Egner **WS 23/24 – Probeklausur**

Bearbeitung: Di., 09.01.2024, 1 Stunde; Besprechung: im Anschluß

1 Quickies (5 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass die Matrixelemente $\langle l', m' | z | l, m \rangle$ nur für $m = m'$ von Null verschieden sind. Dabei sind $|l, m\rangle$ Eigenzustände von $\vec{L}^2$ und L_z .

Solution

$$\begin{aligned} [L_z, z] &= 0 \\ \rightarrow \langle l', m' | [L_z, z] | l, m \rangle &= 0 = (m' - m) \langle l', m' | z | l, m \rangle \end{aligned}$$

Falls $m \neq m'$, gilt also $\langle l', m' | z | l, m \rangle = 0$

- (b) Gegeben seien die Vierervektoren $a^\mu = (a_0, \vec{a})^T$, $b^\mu = (b_0, \vec{b})^T$. Welche der folgenden Ausdrücke sind invariant unter räumlichen Drehungen: (i) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, (ii) $a_0 b_0$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Solution

Sowohl (i) als auch (ii) sind invariant unter räumlichen Drehungen. Das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist invariant unter Drehung des Koordinatensystems und da $a_\mu b^\mu$ ebenfalls invariant ist, ist auch $a_0 b_0$ invariant.

- (c) Zeigen Sie, dass gilt $\not{p}\not{p} = p^2$, wobei p^μ ein Vierervektor ist.

Solution

$$\not{p}\not{p} = p_\mu p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2} p_\mu p_\nu \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = p^2. \quad (1)$$

- (d) Berechnen Sie die Spur $\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu)$.

Solution

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}) = g^{\mu\nu} \text{Tr}(\mathbf{I}_4) = 4g^{\mu\nu} \quad (2)$$

(e) Berechnen Sie den Kommutator $[\sigma_{\mu\nu}, \gamma_\omega]$ mit $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$.

Solution

$$\begin{aligned}
 [\sigma_{\mu\nu}, \gamma_\omega] &= \frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\omega - \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\omega - \gamma_\omega\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\omega\gamma_\nu\gamma_\mu) \\
 &= \frac{i}{2}(\gamma_\mu\{\gamma_\nu, \gamma_\omega\} - \gamma_\mu\gamma_\omega\gamma_\nu - \gamma_\nu\{\gamma_\mu, \gamma_\omega\} + \gamma_\nu\gamma_\omega\gamma_\mu \\
 &\quad - \{\gamma_\omega, \gamma_\mu\}\gamma_\nu + \gamma_\mu\gamma_\omega\gamma_\nu + \{\gamma_\omega, \gamma_\nu\}\gamma_\mu - \gamma_\nu\gamma_\omega\gamma_\mu) \\
 &= \frac{i}{2}(\gamma_\mu\{\gamma_\nu, \gamma_\omega\} - \gamma_\nu\{\gamma_\mu, \gamma_\omega\} - \{\gamma_\omega, \gamma_\mu\}\gamma_\nu + \{\gamma_\omega, \gamma_\nu\}\gamma_\mu) \\
 &= 2i(g_{\omega\nu}\gamma_\mu - g_{\mu\omega}\gamma_\nu), \tag{3}
 \end{aligned}$$

2 Zeitabhängige Störungstheorie (5 Punkte)

Wir betrachten ein System mit drei Energie-Niveaus. Der Hamilton-Operator im ungestörten Zustand sei gegeben mit

$$H_0 = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Der Ausgangszustand des Systems (bei $t = -\infty$) sei der Grundzustand mit Energie $\hbar\omega$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das System einer konstanten Störung H' ausgesetzt, die zum Zeitpunkt $t = \pi/\omega$ wieder ausgeschaltet wird. Die Störung habe die Form

$$H' = \hbar\omega\Theta(t)\Theta\left(\frac{\pi}{\omega} - t\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System zum Zeitpunkt $t = \infty$ im Zustand der höchsten beziehungsweise mittleren Energie befindet. Betrachten Sie hierbei jeweils die ersten nicht verschwindenden Ordnungen in der Störungstheorie.

Wir beginnen mit dem Zustand höchster Energie, den wir Zustand 3 nennen. In erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie ergibt sich

$$\begin{aligned}
 c_3 &= -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \langle 3|H'|1 \rangle \exp\left(i \frac{E_3 - E_1}{\hbar} t'\right) \\
 &= -\frac{i}{\hbar} a \hbar \omega \int_0^{\pi/\omega} dt' \exp\left(i \frac{E_3 - E_1}{\hbar} t'\right) \\
 &= -\frac{i}{\hbar} a \hbar \omega \int_0^{\pi/\omega} dt' \exp(3i\omega t') \\
 &= \frac{2}{3} a
 \end{aligned}$$

Dementsprechend erhalten wir die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System in Zustand 3 befindet mit

$$|c_3|^2 = \frac{4}{9} a^2.$$

Wir betrachten nun das mittlere Energieniveau (Zustand 2) im Endzustand. In erster Ordnung Störungstheorie erhalten wir

$$c_2 = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \langle 2|H'|1 \rangle \exp\left(i \frac{E_2 - E_1}{\hbar} t'\right) = 0,$$

da $\langle 2|H'|1 \rangle = 0$. Wir müssen also die zweite Ordnung betrachten. Hier ergibt sich

$$c_2 = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} dt' \langle 2|H'|m \rangle \exp\left(i \frac{E_2 - E_m}{\hbar} t'\right) \int_{-\infty}^{t'} dt'' \langle m|H'|1 \rangle \exp\left(i \frac{E_m - E_1}{\hbar} t''\right).$$

Auf Grund der Struktur von H' tragen nur die Terme mit $m = 3$ bei. Wir erhalten damit

$$\begin{aligned}
 c_2 &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 ab \hbar^2 \omega^2 \int_0^{\pi/\omega} dt' \exp(-2i\omega t') \int_0^{t'} dt'' \exp(3i\omega t'') \\
 &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 ab \hbar^2 \omega^2 \int_0^{\pi/\omega} dt' \exp(-2i\omega t') \frac{1}{3i\omega} (\exp(3i\omega t') - 1) \\
 &= \frac{ab}{3} i\omega \int_0^{\pi/\omega} dt' (\exp(i\omega t') - \exp(-2i\omega t')) \\
 &= -\frac{2}{3} ab.
 \end{aligned}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also

$$|c_2|^2 = \frac{4}{9} a^2 b^2$$

3 Dirac Gleichung (5 Punkte)

- (a) Es sei Ψ eine Lösung der Dirac-Gleichung

$$(i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m) \Psi = 0.$$

In den Übungen haben Sie die Gleichung hergeleitet, die von $\bar{\Psi}$ gelöst wird. Leiten Sie nun die Gleichung her, die von $\Psi^C = C\bar{\Psi}^T$ gelöst wird.

Hinweis: Die Ladungskonjugationsmatrix C erfüllt die Relation $C(\gamma^\mu)^T C^{-1} = -\gamma^\mu$.

Solution

In den Übungen wurde bereits gezeigt, dass $\bar{\Psi}$ die Gleichung

$$\bar{\Psi} \left(i \overleftarrow{\cancel{\partial}} + e\cancel{A} + m \right) = 0$$

erfüllt. Transponiert man diese Gleichung, multipliziert von links mit der Matrix C und fügt eine 1 ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= C \left(i(\gamma^\mu)^T \partial_\mu + e(\gamma^\mu)^T A_\mu + m \right) C^{-1} C \bar{\Psi}^T \\ &= C \left(i(\gamma^\mu)^T \partial_\mu + e(\gamma^\mu)^T A_\mu + m \right) C^{-1} \bar{\Psi}^C \\ &= (-i\cancel{\partial} - e\cancel{A} + m) \bar{\Psi}^C \\ &= (i\cancel{\partial} + e\cancel{A} - m) \bar{\Psi}^C \end{aligned}$$

Der Unterschied zur Diracgleichung besteht hier nur im Vorzeichen von e .

- (b) Die Spinoren u_1 und u_2 sind Lösungen der freien Diracgleichung:

$$u_1 = N \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, u_2 = N \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

wobei N die Normierungskonstante ist. Leiten Sie die Bedingung an den Impuls $\vec{p}$ her, damit eine geeignet gewählte Linearkombination von u_1 und u_2 ein Eigenvektor zum Operator

$$S_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix}$$

ist.

Hinweis: Starten Sie mit der Eigenwertgleichung

$$S_x (c_1 u_1 + c_2 u_2) = \lambda (c_1 u_1 + c_2 u_2)$$

und finden Sie zuerst die Beziehung zwischen c_1 und c_2 . Setzen Sie diese Bedingung in die Eigenwertgleichung ein, um die gesuchte Einschränkung für $\vec{p}$ zu erhalten. Die Paulimatrizen sind gegeben durch

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solution

Wir schreiben die Eigenwertgleichung aus:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left[c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{p_z}{E+m} \end{pmatrix} \right] = \lambda \left[c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{p_z}{E+m} \end{pmatrix} \right]$$

In einem ersten Schritt betrachten wir die beiden oberen Komponenten und erhalten

$$\frac{1}{2} \left[c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \lambda \left[c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Durch Einsetzen der beiden Gleichungen erhalten wir $c_1 = 2\lambda c_2$, $c_2 = 2\lambda c_1$ beziehungsweise $c_1 = \pm c_2$. Betrachten wir nun die unteren beiden Komponenten der Eigenwertgleichung finden wir

$$\frac{1}{2} \left[c_1 \begin{pmatrix} p_x + ip_y \\ p_z \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -p_z \\ p_x - ip_y \end{pmatrix} \right] = \lambda \left[c_1 \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix} \right]$$

Wir ersetzen auf der rechten Seite der Gleichung $\lambda c_2 = c_1/2$, $\lambda c_1 = c_2/2$ und erhalten

$$c_1 \begin{pmatrix} 2ip_y \\ 2p_z \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 2p_z \\ 2ip_y \end{pmatrix}$$

und nach Einsetzen von $c_1 = \pm c_2$

$$\begin{pmatrix} ip_y \\ p_z \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} p_z \\ ip_y \end{pmatrix}.$$

Dementsprechend folgern wir, dass $p_y = p_z = 0$ und somit, dass der Impuls in x -Richtung orientiert sein muss.