

Fach: Theoretische Physik		
PrüferIn: Mirlin		
☒ BP ☐ NP ☐ SF ☐ EF ☐ NF ☐ LA	Datum: 10. Oktober 2023	Fachsemester: 11
Welche Vorlesungen wurden geprüft? Theo D, E, Fa? (bin mir unsicher, Stoff steht im Modulhandbuch)		
Welche Vorlesung der PrüferIn hast Du gehört? Eigentlich keine. Ich war mal bei ihm in 3 Theo Fb-Vorlesungen. Fand den Prof sympathisch, aber die Übungen zu heftig.		

Zur Vorbereitung

Absprache mit PrüferIn über folgende Themengebiete: Neues Schema (Moderne Theoretische Physik I + II)
Absprache mit PrüferIn über Literatur/Skripte: -
Verwendete Literatur/Skripte: Schmalien Theo D, Melnikov Theo E, Fließbach Lehrbuch "Statistische Physik". (Metelman Theo I? Quantum Mechanics, Heinrich Theo E - Herleitung Fermis Goldene Regel) Englische (und deutsche) Wikipedia
Dauer der Vorbereitung: ~2 Monate (38 Wochentage à ~5 Stunden)
Art der Vorbereitung: allein, habe mich nur einmal abfragen lassen
Allgemeine Tips zur Vorbereitung: Öfter abfragen lassen und relativ genau an den Protokollen orientieren, wenn ihr kürzer lernen wollt.

Zur Prüfung

Wie verlief die Prüfung? Viel Herleitungen an der Tafel vorrechnen. Mirlin hat die Theme relativ klar vorgegeben und einen dann erstmal machen lassen, bis ein Fehler kam oder er noch etwas bestimmtes hören wollte
Wie reagierte die PrüferIn, wenn Fragen nicht sofort beantwortet wurden? Hat Tipps gegeben
Kommentar zur Prüfung: Ich habe an der Tafel relativ lange zum rechnen gebraucht, deshalb haben die ersten Teile relativ lange gebraucht.
Kommentar zur Benotung: 1.0, war aber knapp, sie (Mirlin und Beisitzerin) haben zwischen 1.3 und 1.0 geschwankt (Mirlin war wohl der Teil mit den d Dimensionen beim Bosegas relativ wichtig). Ich habe bei einigem nicht direkt das Richtige gehabt, aber beim Nachfragen meistens verstanden, was er wollte und korrigieren können, deshalb war das trotzdem ok.
Die Schwierigkeit der Prüfung: Am Anfang ruhig überlegen, wie man etwas erklärt. An der Tafel rechnen und eigene Fehler erkennen. Trotz Aufregung Zeit nehmen, Dinge zu durchdenken.

Die Fragen

Themenübersicht: siehe unten
Schreibweise:

M::: Prof. Mirlin

S::: Student*in

$\sum_{x=a}^b$: Summe von $x=a$ bis $x=b$.

M::: Wie beschreiben wir Messungen in der Quantenmechanik?

S::: Wir beschreiben Messungen in der Quantenmechanik mit dem Operator $\hat{O}$. $\langle \Psi | \hat{O} | \Psi \rangle$ gibt uns den Erwartungswert für die Messung. $\hat{O} | \Psi_n \rangle = \lambda_n | \Psi_n \rangle$ ist die Eigenwertgleichung. Wir bekommen die Eigenwerte λ_n und die Eigenfunktionen $| \Psi_n \rangle$. Wir können in der Quantenmechanik jetzt nicht jeden Wert messen, sondern nur die Eigenwerte.

$$\langle \Psi | \hat{O} | \Psi \rangle = \sum_n \lambda_n \langle \Psi_n | \Psi_n \rangle$$

$\langle \Psi_n | \Psi_n \rangle$ gibt uns die Wahrscheinlichkeit. So ist der Erwartungswert der Mittelwert.

M::: Das stimmt nicht, $\langle \Psi_n | \Psi_n \rangle = 1$.

S::: (Habe es das Problem noch nicht ganz verstanden). Also wir nehmen hier $|\varphi\rangle = \sum_n a_n | \Psi_n \rangle$.

M::: Trotzdem ist $\langle \Psi_n | \Psi_n \rangle = 1$.

S::: Stimmt. Wenn wir das einsetzen bekommen wir natürlich: $\langle \varphi | \hat{O} | \varphi \rangle = \sum_n \lambda_n \langle \Psi_n | \Psi_n \rangle |a_n|^2$

M::: (Und was ist noch...?)

S::: Wir haben die Schrödingergleichung, die uns die Zeitentwicklung und stabilen Zustände gibt: $E\Psi = \hat{H}\Psi$ (stationär) und $i\hbar\partial/(\partial t)\Psi = H\Psi$ (zeitentwicklung). Für ein freies Teilchen $H = p^2/(2m)$, sonst kommt noch Potential $V(x)$ oder weiteres dazu.

M::: Also die Schrödingergleichung hat eigentlich nichts mit der Messung zu tun. Was ist noch bei der Messung?

S::: Nach der Messung kollabiert die Wellenfunktion zur Eigenfunktionen des zugehörigen gemessenen Eigenwerts.

M::: Ok, gucken wir uns ein Beispiel an. Betrachten wir ein Spin-1/2-Teilchen. Wir haben Spin up. Was passiert, wenn wir den Spin in x-Richtung messen?

S::: Wir messen mit 50% Wahrscheinlichkeit Spin in positive x-Richtung und 50% in negative x-Richtung.

M::: Ok, ich sehe, sie haben das verstanden.

Leiten sie die zeitunabhängige Störungstheorie her.

S::: Habe die Zeitunabhängige, nicht-entartete Störungstheorie hergeleitet.

$$H = H_0 + \lambda V$$

$$| \Psi_n \rangle = | \Psi_n^{(0)} \rangle + \lambda | \Psi_n^{(1)} \rangle + \lambda^2 | \Psi_n^{(2)} \rangle + O(\lambda^3)$$

$$E_n = E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + O(\lambda^3)$$

$| \Psi_n^{(0)} \rangle$ und $E_n^{(0)}$ sind die ungestörten Zustände / lösen den ungestörten Hamiltonoperator H_0 .

Jetzt müssen wir alles in die Schrödingergleichung einfügen, und dann nach den Potenzen von λ ordnen, dann bekommen wir für

λ^1 : ... (siehe Literatur). Wir brauchen noch die Annahme, dass die Korrekturen orthogonal zum Grundzustand.

M::: Was ist der Grundzustand?

S::: Ah stimmt. Der Grundzustand ist der Zustand mit niedrigster Energie, $n = 0$. Ich meine den ungestörten Zustand (nullte Ordnung). Also die Korrekturen sind orthogonal zum ungestörten Zustand.

Wir multiplizieren mit $\langle \Psi_l^{(0)} |$ von links.

$$\dots = \dots \text{ in der Gleichung markiert: } \langle \Psi_l^{(0)} | \Psi_n^{(0)} \rangle = \delta_{l,n}$$

Jetzt unterscheiden wir die Fälle $l \neq n$ und $l = n$:

$$l = n: E_n^{(1)} = \langle \Psi_n^{(0)} | V | \Psi_n^{(0)} \rangle$$

Für $l \neq n$ schreibe ich gleich das Ergebnis hin:

$$l \neq n: \Psi_n^{(1)} = \sum_l \langle \Psi_l^{(0)} | V | \Psi_n^{(0)} \rangle / (E_n - E_l)$$

M::: Ich verstehe nicht ganz?

S::: Habe ich einen Fehler gemacht? (gucke nochmal) Ne, das sieht eigentlich richtig aus...

M::: Ich verstehe nicht, wir haben links eine Wellenfunktion. Und rechts?

S::: Ah. Links aus dem Ψ ein Ket gemacht und rechts den Ket ergänzt, sodass:

$$l \neq n: | \Psi_n^{(1)} \rangle = \sum_l \langle \Psi_l^{(0)} | V | \Psi_n^{(0)} \rangle / (E_n - E_l) | \Psi_l^{(0)} \rangle$$

M::: Ok und wie haben Sie das jetzt aus der Gleichung bekommen?

S::: Erst versucht zu erklären, und dann einfach den Zwischenschritt ausgerechnet:

$$\langle \Psi_l^{(0)} | \Psi_n^{(1)} \rangle = \langle \Psi_l^{(0)} | V | \Psi_n^{(0)} \rangle / (E_n - E_l)$$

und dann können wir einfach die Gleichung von oben wieder nehmen $|\varphi\rangle = \sum_n a_n | \Psi_n \rangle$ mit $a_n = \langle \varphi | \Psi_n \rangle$ (nach der letzten Gleichung hatte er oben auch irgendwann gefragt).

M::: Warum sind die Korrekturen orthogonal? Das ist eigentlich keine Annahme, sondern hat einen Grund.

S::: (Habe überlegt und wusste nicht so ganz, weshalb). Also wir betrachten hier Störungen, die nicht gleich diagonalisiert werden können, wie H_0 , sonst bräuchten wir die Störungstheorie gar nicht, weil es einfach zu rechnen wäre.

M::: Nein. Denken Sie an die Normierung. (Ich weiß nicht mehr genau, wie viel er verraten hat).

S::: Also der Grund ist die Normierung muss 1 bleiben.

M::: Ok. Und es gibt noch andere etwas anderes, wenn man Störungstheorie macht. Wir hatten eine Annahme gemacht oben.

S::: Ja. Wir haben angenommen, dass V zeitunabhängig ist. Wenn V von t abhängt, bekommen wir zeitabhängige Störungstheorie.

M::: Das stimmt, ich meine aber etwas anderes.

S::: Ah, wir hatten hier nicht-entartete Störungstheorie. Wenn die ungestörten Zustände entartet sind, müssen wir anders vorgehen:

Wir Betrachten den entarteten Unterraum (ich habe ein Beispiel für H_0 in Matrixschreibweise mit den Eigenenergien auf der Diagonalen aufgeschrieben und ein Quadrat um die gleichen Werte ε gezogen). Die Eigenfunktionen von H_0 sind eine beliebige Basis des Unterraums. (In meinem Beispiel ist der Unterraum 2D).

$$V|\Psi_{+/-}\rangle = \lambda_{+/-} |\Psi_{+/-}\rangle$$

$E_{+/-} = \varepsilon + \lambda_{+/-}$ sind die Energien der Zustände.

M::: Richtig, also wir diagonalisieren V .

Leiten Sie nun die Dirac-Gleichung her.

S::: Herleitung wie im Skript von Melnikov.

(unnötiger Kommentar:) α ist dann 12-dimensional (an der Tafel stand aber nur α_i).

M::: Wie, das verstehe ich nicht.

S::: Also die Pauli-Matrizen sind 2D, dann ist α_i 4D. Und dann kommen nochmal drei Dimensionen für die i . Also ist α (Vektor hingeschrieben) 12D.

M::: Achso. Das ist aber eine (komplizierte/ungewöhnliche) Schreibweise.

S::: Ja, finde ich auch, steht so im Melnikov-Skript (ich habe mich erst versprochen und Mirlin gesagt - ups).

M::: Wir wollen jetzt betrachten, was im nicht-relativistischen Limes passiert, da erwarten wir ja etwas klassisches. Bitte nicht die ganze Herleitung, nur welche Schritte Sie machen, wegen der Zeit.

S::: Wir müssen jetzt erstmal Magnetismus einführen, also das Vektorpotential, damit wir ein interessantes Ergebnis bekommen.

Über den bekannten Term $(p - e/cA)^2$ habe ich nachgerechnet, dass $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ie/\hbar c A_\mu$ wird. $A = (eA_0, -A^{\text{vektor}})$. A_0 ist das elektrische Potential.

S::: Wir haben Ψ vierdimensional (up-/down Teilchen/Antiteilchen). Wir nehmen jetzt den Ansatz $\Psi = (\varphi, \chi)$. Wir betrachten nur die positiven Energien. Erklärt, dass das Vorzeichen für Teilchen/Antiteilchen steht und wir relativistisch eine Überlagerung bekommen. In der nicht-relativistischen Näherung betrachten wir nur noch φ .

Näherung: $p \ll mc$, $e/cA \ll mc$

Schließlich bekommen wir die Pauli-Gleichung:

$$((p - e/cA)^2/2m + eA_0 + \mu B) \Psi = E\Psi.$$

$\mu = -\mu_B$ $\sigma = \gamma$ s. $\gamma = e\hbar/m$ ist das gyromagnetische Verhältnis.

M::: Gut. Gehen wir über zur Physik:

(Leiten Sie die Bosonenstatistik her)

S::: Herleitung aus dem großkanonischen Potential Y . Zuerst Y umgeformt (wie im Fließbach-Lehrbuch "Statistische Physik", Kap. 29), dann den Mittelwert $n_{p,i}$ berechnet. (Ich glaube, ich habe da einen Fehler gemacht, habe ich zu dem Zeitpunkt aber nicht gemerkt).

M::: Ok, schreiben Sie das Ergebnis hin

S::: Bose-Einstein-Statistik hingeschrieben.

M::: Wie bekommen wir hier jetzt Thermodynamische Größen?

S::: $J = -k_B T \ln Y$. $E = TdS - PdV + \mu dN$, $J = E - TS - \mu N \Rightarrow J = -SdT - PdV - Nd\mu$. Also ist J eine Funktion von T , V , μ . Wenn wir andere Größen haben wollen müssen wir das umrechnen.

M::: Wie bekommen wir jetzt zum Beispiel die Entropie?

S::: Wir haben hier $-S$ (zeige auf $-S$ in letzter Gleichung). Wenn wir die partiellen Ableitungen von J angucken, bekommen wir:

$$J = \partial J / \partial T dT + \dots \text{Der Vergleich der beiden Gleichungen gibt uns } S.$$

M::: Sehr gut.

M::: Was passiert für Tiefe Temperaturen mit Bosonen? Sie wissen vielleicht schon, was ich meine?

S::: Ja, das Bose-Einstein-Kondensat.

Wenn wir $N = \sum_i n_{p,i}$ konstant halten und die Temperatur senken, wächst $\beta = 1/(k_B T)$. D.h. wir müssen μ vergrößern, um N konstant zu halten. Jetzt kann μ nur bis zu einem bestimmten Grad wachsen. $n \geq 0$, also ist $\mu \leq 0$. Wenn wir jetzt die Temperatur weiter senken, können wir N nicht mehr konstant halten. Jetzt stellt sich raus, dass wir den Grundzustand $p_0 = 0$ nicht ausreichend betrachtet haben (eigentlich bisher schon, aber im Integral $d^3p = 4\pi p^2 dp$ geht der verloren). Deshalb benennen wir das bisherige N um zu N_+ (nur Zustände mit positiver Energie ohne 0) und schreiben: $N = N_0 + N_+$.

$N_0/N = 1 - (T/T_C)^{3/2}$. T_C ist die kritische Temperatur. Das ist der Punkt, wo μ Null wird. So können wir T_C auch ausrechnen.

M::: Was passiert in d Dimensionen (z.B. $d=1$)?

S::: Weiß ich nicht. In der Gleichung N_0/N habe ich 3 mit 1 ersetzt $\rightarrow$ das würde funktionieren, aber im Integral hatten wir davor $d^3p = 4\pi p^2 dp$, jetzt nur noch dp .

M::: in 1 bzw. 2 Dimensionen divergiert das Integral in N . Daher wird μ nicht null und N_0 bleibt vernachlässigbar klein.

Gut, gehen Sie bitte nach draußen, wir besprechen die Note.

Themenübersicht

- * Wie beschreiben wir Messungen in der Quantenmechanik?
- * zeitunabhängige, nicht-entartete Störungstheorie
- * zeitunabhängige, entartete Störungstheorie
- * Dirac-Gleichung motivieren & herleiten
- * nicht-relativistischer Limes der Dirac-Gleichung (-> Pauli-Gleichung)
- * Bosegas (Bosestatistik herleiten)
- * Bose-Einstein-Kondensat (was passiert bei tiefen Temperaturen mit Bosonen?, ohne Rechnung wegen Zeitmangel)
- Was passiert in d Dimensionen?)

Tipps, die es mir einfacher gemacht hätten:

- * An der Tafel rechnen üben (oft genug einen Schritt zurück machen).
- * Sich überlegen, wie man die Dinge präsentiert. Vor allem bei den Basics wusste ich nicht, wo ich anfangen sollte und habe alles etwas durcheinander gemacht und dabei sind einige Fehler passiert.
- * Wenn Mirlin nicht sagt, dass man etwas abkürzen soll alle Schritte ruhig durchrechnen, sonst fragt er hinterher nach und man muss sich auf die Schnelle überlegen, was man denn für Rechenschritte überprungen hat.