Mündliche Theo-Prüfung-Schmalian-10.12.2020

December 2020

1 Vorbereitung

- Absprache über folgende Themengebiete: keine
- Verwendete Literatur/Skripte: Münster, Sakurai (QM), Schwabel (statistische Mechanik), Schmalian-Skript(TheoD,TheoF)
- Dauer der Vorbereitung: ca. 9 Wochen
- Art der Vorbereitung: Alleine erst Literatur, dann Protokolle durchgearbeitet
- Allgemeine Tipps zur Vorbereitung: Orientiert euch beim Lernen an den Protokollen, viele Fragen wiederhohlen sich in leicht abgewandelter Form. Ein Lernpartner könnte hilfreich sein.

2 Zur Prüfung

- Wie verlief die Prüfung?: Im großen und ganzen angenehm.
- Wie reagiert der Prüfer wenn fragen nicht sofort beantwortet wurden?: Er bleibt ruhig, lässt einem viel Zeit zum Nachdenken, und gibt auch Tipps.
- Kommentar zur Prüfung: Empfehlenswert, sehr angenehme Atmosphäre
- Kommentar zur Benotung: 1,7 Absolut zufrieden
- Die Schwierigkeit der Prüfung: Die Fragen zum Stern-Gerlach-Experiment, da ich mir dazu nichts angesehen habe.

3 Die Fragen

Ich halte es nicht für Sinnvoll hier das gesamte Prüfungsgespräch im Wortlaut wiederzugeben. Stattdessen werde ich versuchen seine Fragen, nach bestem Wissen, mit den Korrekten Antworten zu präsentieren.

3.1 Stern-Gerlach-Experiment

Ich sollte kurz erklären, was das Stern-Gerlach-Experiment ist und was man dabei beobachten kann. Beim Stern-Gerlach-Experiment wird ein Strahl aus Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen (Silberatome) durch ein inhomogenes B-Feld in z-Richtung geschickt. Man beobachtet, dass sich der Strahl aufspaltet. Die Atome bei denen $|\uparrow>$ gemessen wird, werden nach oben abgelenkt, die bei denen $|\downarrow>$ gemessen wird nach unten. Nun wollte er wissen was passiert wenn einer der beiden Teilstrahlen nochmal durch ein B-Feld in z-Richtung geschickt wird und wie man das formell beschreiben kann. In diesem Fall kommt es zu keiner weiteren Aufspaltung. Den Messprozess kann man formell mit einem Projektionsoperator $|\uparrow><\uparrow|, |\downarrow><\downarrow|$ beschreiben.

$$|\uparrow><\uparrow|\uparrow>=|\uparrow> \tag{1}$$
$$|\downarrow><\downarrow|\uparrow>=0 \tag{2}$$

Es gibt also nur einen möglichen Zustand nach der Messung. Jetzt wollte er wissen was passiert wenn das zweite B-Feld in y-Richtung zeigt. In dem Fall kommt es zu einer weiteren Aufspaltung.

$$|\rightarrow><\rightarrow|\uparrow>=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\rightarrow><\rightarrow|\rightarrow>+|\rightarrow><\rightarrow|\leftarrow>)=\frac{1}{\sqrt{2}}|\rightarrow> \tag{3}$$
$$|\leftarrow><\leftarrow|\uparrow>=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\leftarrow><\leftarrow|\rightarrow>+|\leftarrow><\leftarrow|\leftarrow>)=\frac{1}{\sqrt{2}}|\leftarrow> \tag{4}$$

Es gibt also zwei mögliche Zustände nach dem Messprozess. Nun wollte er wissen was passiert, wenn einer der Teilstrahlen nochmal durch ein B-Feld in z-Richtung abgelenkt wird. In diesem kommt es wieder zu einer Aufgspaltung.

$$|\uparrow><\uparrow|\rightarrow>=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow><\uparrow|\uparrow>+|\uparrow><\uparrow|\downarrow>)=\frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow> \tag{5}$$
$$|\downarrow><\downarrow|\rightarrow>=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow><\downarrow|\uparrow>+|\downarrow><\downarrow|\downarrow>)=\frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow> \tag{6}$$

Es gibt wieder zwei mögliche Zustände nach dem Messprozess.

3.2 Landau-Niveaus

Hier wollte er das Energiespektrum für ein Teilchen in einem homogenen Magnetfeld in Z-Richtung wissen. Bei der Herleitung sollte ich keine spezifische Eichung verwenden. Um zu zeigen, dass das Energiespektrum dem eines harmonischen Oszillators entspricht, muss man den Hamiltonian in folgende form bringen.

$$H=\frac{\pi_x^2}{2m}+\frac{\pi_y^2}{2m}+\frac{\pi_z^2}{2m}=\frac{m\omega^2}{2}\tilde{\pi_x}^2+\frac{\pi_y^2}{2m}+\frac{\pi_z^2}{2m} \tag{7}$$

Mit $[\tilde{\pi_x},\pi_y]=i\hbar$. Um den effektiven Operator $\tilde{\pi_x}$ zu konstruieren, berechnet man zunächst den Kommutator $[\pi_x,\pi_y]$.

$$\begin{aligned}[\pi_x,\pi_y]=[p_x-\frac{e}{c}A_x,p_y-\frac{e}{c}A_y]=-\frac{e}{c}([p_x,A_y]+[A_x,p_y])=-\frac{e}{c}((p_xA_y)-(p_yA_x))\\ =\frac{i\hbar e}{c}((\nabla_xA_y)-(\nabla_yA_x))=\frac{i\hbar e}{c}B\end{aligned} \tag{8}$$

Damit ergibt sich für den effektiven Operator $\tilde{\pi_x} = \frac{c}{eB}\pi_x$. Der Hamiltonian ausgedrückt durch $\tilde{\pi_x}$ lautet:

$$H = \frac{e^2B^2}{2mc^2}\tilde{\pi_x}^2 + \frac{\pi_y^2}{2m} + \frac{\pi_z^2}{2m} = \frac{m\omega^2}{2}\tilde{\pi_x}^2 + \frac{\pi_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} \tag{9}$$

Damit ergibt sich für das Energiespektrum

$$E_{n,k_z} = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \tag{10}$$

Mit $w = \frac{eB}{mc}$. Als nächstes wollte er noch, dass ich die Entartung bestimme. Wenn man die Landau-Niveaus mit der expliziten Eichung $\vec{A} = -By\vec{e_y}$ berechnet hätte, würde man sehen, dass der Mittelpunkt der Schwingung um $y_0 = \frac{c}{eB}\hbar k_x$ verschoben ist. Diese Verschiebung darf natürlich nicht größer sein als die Beschränkung des Systems in y-Richtung L_y. Desweiteren gilt folgende Beziehung zwischen der Beschräkung des Systems in x-Richtung L_x und k_x.

$$\hbar k_x = \frac{2\pi}{L_x} l_x \tag{11}$$

l_x ist hierbei eine beliebige natürlich Zahl. Somit ergibt sich:

$$L_y = y_{0,max} = \frac{c}{eB}\hbar k_{x,max} = \frac{2\pi c}{eBL_x} l_{x,max} \tag{12}$$

$$\Leftrightarrow l_{x,max} = \frac{L_x L_y eB}{2\pi c} \tag{13}$$

Wobei $l_{x,max}$ dem Entartungsgrad entspricht.

3.3 Dirac-Gleichung

Ich sollte ein relativistisches Teilchen in einem homogenen Mangnetfeld in Z-Richtung betrachten und davon das Energiespektrum berechnen. Dazu betrachte ich den Dirac-Hamiltonian und quadriere diesen um auf ein Problem analog zu den Landau-Niveaus zu kommen.

$$H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} + \beta mc^2 \tag{14}$$

$$H^2 = c^2(\vec{\alpha} \cdot \vec{\pi})^2 + m^2c^4 + mc^3(\vec{\alpha}\beta + \beta\vec{\alpha})\vec{\pi} \tag{15}$$

Aufgrund der Antikommutatorrelation $\{\vec{\alpha}, \beta\} = 0$ verschwindet der letzte Term. Der Term $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\pi})^2$ kann folgendermaßen berechnet werden.

$$\begin{aligned}(\vec{\alpha} \cdot \vec{\pi})^2 &= \vec{\pi}^2 + \sum_{i \neq j} \alpha_i \pi_i \alpha_j \pi_j \\ &= \vec{\pi}^2 + \sum_{i \neq j} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \pi_i \pi_j \\ &= \vec{\pi}^2 + \sum_{i \neq j} \begin{pmatrix} \sigma_i \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_i \sigma_j \end{pmatrix} \pi_i \pi_j \\ &= \vec{\pi}^2 + i \epsilon_{ijk} \sigma_k \pi_i \pi_j \\ &= \vec{\pi}^2 + i \epsilon_{ijk} (p_i - \frac{e}{c} A_i)(p_j - \frac{e}{c} A_j) \sigma_k \\ &= \vec{\pi}^2 - \frac{ie}{c} \epsilon_{ijk} (p_i A_j + A_i p_j) \sigma_k \\ = \vec{\pi}^2 - \frac{ie}{c} \epsilon_{ijk} (p_i A_j) \sigma_k &= \vec{\pi}^2 - \frac{\hbar e}{c} \epsilon_{ijk} (\nabla_i A_j) \sigma_k \\ &= \vec{\pi}^2 - \frac{\hbar e}{c} \vec{B} \cdot \vec{\sigma} = \vec{\pi}^2 - \frac{\hbar e}{c} B \sigma_z\end{aligned} \tag{16}$$

Damit ergibt sich für den quadrierten Hamiltonian:

$$\begin{aligned}H^2 &= c^2 \vec{\pi}^2 - \hbar e c B \sigma_z + m^2 c^4 \\ &= 2mc^2 \hbar \omega (N + \frac{1}{2}) + c^2 \hbar^2 k_z^2 - \hbar e c B \sigma_z + m^2 c^4\end{aligned} \tag{17}$$

Hier wurde ausgenutzt, dass der erste Term bis auf einen Vorfaktor identisch mit dem Hamitonian der nicht relativistischen Landau-Niveaus ist. Für das Energiespektrum ergibt sich damit:

$$\begin{aligned}E_{n,m_s,k_z} &= \pm \sqrt{2mc^2 \hbar \omega (n + \frac{1}{2}) + c^2 \hbar^2 k_z^2 - 2 \hbar e c B m_s + m^2 c^4} \\ &= \pm \sqrt{2mc^2 \hbar \omega (n + \frac{1}{2} + m_s) + c^2 \hbar^2 k_z^2 + m^2 c^4}\end{aligned} \tag{18}$$

Mit $\omega = \frac{eB}{mc}$ und $m_s = \pm \frac{1}{2}$.

3.4 Ideales Gas

Ich sollte ein ideales Gas mit der Dispersionsrelation $\epsilon(p) = ap^{28}$ betrachten und daraus die Beziehung zwischen Impuls, Volumen, Temperatur und Teilchenzahl ableiten. Zunächst berechnet man die Zustandssumme.

$$Z = \frac{1}{N!} \int \frac{dp^{3N} dx^{3N}}{h^3} \exp(-\beta \sum_{i=1}^{N} a p_i^{28}) = \frac{V^N}{N!} \left(\int \frac{dp^3}{h^3} \exp(-\beta a p^{28}) \right)^N = \frac{V^N}{N!} f(T)^N \tag{19}$$

Über in freie Energie kann der Druck berechnet werden.

$$F = -k_B T \ln(Z) = -k_B T [N \ln(V) - \ln(N!) + N \ln(f(T)] \tag{20}$$

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{N k_B T}{V} \tag{21}$$

Es ergibt sich also die selbe Beziehung wie für das klassische ideale Gas. Diese Beziehung ist unabhängig von der Dispersionsrelation.