

Fach: Theoretische Physik

PrüferIn: Shnirman

BP NP SF EF NF LA

Datum: 24. April 2023

Fachsemester: 6

Welche Vorlesungen wurden geprüft? Theo D, Theo E, Theo Fa

Welche Vorlesung der PrüferIn hast Du gehört? Theo D

Zur Vorbereitung

Absprache mit PrüferIn über folgende Themengebiete: -

Absprache mit PrüferIn über Literatur/Skripte: -

Verwendete Literatur/Skripte: Theo D Skript Shnirman, Sakurai, Schwabl Quantenmechanik I und II, Griffiths Quantenmechanik

Dauer der Vorbereitung: 5 Wochen, jeden Tag 2-3 Stunden

Art der Vorbereitung: Alleine. Anfangs erstmal den ganzen Stoff wiederholt, dann mit Prüfungsprotokollen gelernt. Zusätzlich Prüfungssimulation mit Lerngruppe.

Allgemeine Tips zur Vorbereitung: Auf jeden Fall die Altprotokolle durchgehen, einige Fragen wiederholen sich schon des Öfteren. Vor allem: Stark-Effekt, Fermis Goldene Regel, BEK, H-Atom.

Wichtig ist auch zu wissen, über welche Zustände summiert wird.

Zur Prüfung

Wie verlief die Prüfung? Allgemein war die Atmosphäre ziemlich entspannt und ich habe mich nach anfänglicher Nervosität auch sehr wohl gefühlt. Generell wurde Theo D, E und Fa nacheinander abgefragt, obwohl ab und zu hin und her gesprungen wurde, falls es sich angeboten hat.

Wie reagierte die PrüferIn, wenn Fragen nicht sofort beantwortet wurden? Prof. Shnirman ist sehr geduldig und drückt die Frage oft nochmals mit anderen Worten aus. Gibt notfalls auch Hinweise und man erarbeitet die Lösung zusammen.

Kommentar zur Prüfung: Sehr gut. Kann Prof. Shnirman als Prüfer nur empfehlen!

Kommentar zur Benotung: 1.0, trotz einiger Fehler :)

Die Schwierigkeit der Prüfung: Zu verstehen, auf was er mit manchen Fragen abzielt. Kontinuum bei Photonenemission im Wasserstoffatom.

Die Fragen

P: Prüfer

I: Ich

h=hquer

w=omega

P: Zeitabhängige Schrödingergleichung

I: Hingeschrieben und gesagt, dass H hermitesch ist.

P: In welchem Raum ist unsere Wellenfunktion?

I: Sind im L^2 , dem Raum der quadratintegrablen Funktionen.

P: Wir haben doch auch Spinwellenfunktionen?

I: Ja ganz allgemein aus einem Hilbertraum, d.h. Vektorraum, der vollständig unter der durch das Skalarprodukt induzierten Norm ist.

P: Wie kommt man nun auf die zeitunabhängige Schrödingergleichung.

I: Separationsansatz erwähnt und stationäre SG hingeschrieben.

P: Wie ist die Zeitentwicklung einer Wellenfunktion?

I: $|\Psi(0)\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n|\Psi(0)\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$. Mit Zeitentwicklungsoperator: $|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{-i/h E_n t} |n\rangle$.

P: Und wenn der Hamiltonoperator explizit zeitabhängig ist?

I: Dann muss ich den Zeitentwicklungsoperator durch Integration von $i\hbar d/dt U = HU$ bestimmen und kann diesen auf $|\Psi(0)\rangle$ wirken lassen.

P: Wie kann ich den Zeitentwicklungsoperator in einer Basis darstellen?

I: Hier war ich etwas verwirrt und musste mehrmals nachfragen, was genau er hören will. Am Ende wollte er einfach sehen, dass man die Vollständigkeitsrelation einfügen kann, also $U = \sum_n U|n\rangle\langle n|$.

P: Gehen wir rüber zum H-Atom. Wie sieht der Hamiltonoperator in Schwerpunktskoordinaten aus?

I: $H = -\hbar^2/2M \nabla_R^2 - \hbar^2/2\mu \nabla_r^2 - e^2/(4\pi\epsilon_0 r)$ mit Gesamtmasse M und reduzierter Masse μ .

P: Okay, vernachlässigen wir die Schwerpunktsbewegung. Wie löst man das Wasserstoffproblem?

I: Man drückt den Laplaceoperator ∇_r^2 in Kugelkoordinaten aus und bekommt einen Radialanteil und einen Winkelanteil, den man noch durch L^2 ausdrücken kann. Mit einem Separationsansatz...

P: Wie kommt man darauf Kugelkoordinaten zu verwenden?

I: Wir haben eine Kugelsymmetrie, da der Hamiltonoperator mit allen Komponenten des Drehimpulses kommutiert.

P: Welche Quantenzahlen benötige ich und warum reicht H alleine nicht aus?

I: Man hat eine Entartung der Energie und um alle Zustände eindeutig zu beschreiben, benötigt man Operatoren H , L^2 und L_z .

P: Kann ich auch L_x oder L_y verwenden?

I: Ja

P: Kann ich L_x und L_y gleichzeitig verwenden?

I: Nein, da sie nicht miteinander kommutieren.

P: Okay, was ist das Energiespektrum und der Entartungsgrad?

I: $E = -Ry/n^2$ mit $Ry = 13,6\text{eV}$ und Entartungsgrad n^2 bzw. $2n^2$ mit Spin.

P: Kann ich nicht auch noch L^4 zum CSCO hinzufügen?

I: Habe gesagt, dass zwar L^4 mit den anderen Operatoren kommutiert, aber es nicht so sinnvoll ist, da L^4 auch der Quantenzahl l entspricht.

Es folgten einige Rätselvesuche beider Seiten, für was die Buchstaben bei CSCO stehen.

P: (Grinsend) Egal, irgendeiner sollte noch dafür stehen, dass sie unabhängig voneinander sind. Was bedeutet, dass eine Größe erhalten ist...Sagen wir im Schrödinger-Bild?

I: Im Schrödinger-Bild kann ich das Ehrenfest-Theorem verwenden und sagen, dass der Erwartungswert einer Größe konstant bleibt, wenn die Größe mit dem Hamiltonoperator kommutiert und nicht explizit zeitabhängig ist.

P: Können sie mir auch zeigen, dass nichtdiagonale Matrixelemente erhalten sind, wenn der Operator nicht explizit zeitabhängig ist?

I: $i\hbar d/dt \langle \Psi|O|\Phi\rangle = \langle \Psi|[O,H]|\Phi\rangle$

P: Wie kann man die Entartung im H-Atom aufheben?

I: Stark-Effekt, Zeeman-Effekt, Feinstruktur, Hyperfeinstruktur.

P: Welche Terme tragen zur Feinstruktur bei?

I: Relativistische Korrektur, Darwin-Term, Spin-Bahn-Kopplung

P: Okay, gucken wir uns gesondert mal nur die Spin-Bahn-Kopplung an für $n=2$. In wie viele Zustände spaltet unser System auf?

I: 4 Zustände mit $l=1, j=3/2$, 2 Zustände mit $l=1, j=1/2$ und 2 Zustände mit $l=0, j=1/2$.

P: Wie berechnen sie die Energiekorrekturen?

I: Unsere Spin-Bahn-Kopplung ist proportional zu $L \cdot S$, also wechsele ich in die Basis der Drehimpulsaddition $J=L+S$...

P: Warum?

I: Unsere Operatoren L_z, S_z kommutieren nicht mehr mit dem Hamiltonoperator, wegen $L \cdot S$, deswegen nehme ich eine neue Basis J^2, L^2, S^2, J_z .

P: Okay, weiter

I: Ich kann meine Störung $L \cdot S$ ausdrücken durch $1/2(J^2 - L^2 - S^2)$ und erhalte die Energieeigenwerte $E^j(j)$.

P: Schauen wir uns den Stark-Effekt an. Müssen Sie hier den Spin berücksichtigen?

I: Nein, unsere Störung $V=eEz$ kommutiert mit dem Spin, beeinflusst folglich den Spin nicht. Wir können also das Problem also ohne Spin lösen.

P: Welche Art von Störungstheorie brauchen wir?

I: Zeitunabhängige entartete Störungstheorie.

P: Welche Auswahlregeln haben wir?

- I: Man erhält die Auswahlregel $m=m'$ aus $[L_z, z]=0$ und $l+l'$ ungerade aus der Parität der Wellenfunktion. Für $n=2$ reicht das, aber im Allgemeinen findet man, dass sich l nur um 1 verändern kann durch das Wignersche U -Element.
- P: Können Sie mir das zeigen?
- I: $\langle n'l'm' | T_q(k) | nlm \rangle \sim \langle lkmq | l'm' \rangle$ mit dem sphärischen Tensoroperator T und den Clebsch-Gordan-Koeffizienten. Jetzt kann ich z durch die Kugelflächenfunktion Y_{10} darstellen und erhalte $l-1 < l' < l+1$.
- P: Können Sie mir was über die Proportionalitätskonstante sagen?
- I: Proportional zum reduzierten Matrixelement und irgendwas mit $2j+1$. Weiß ich jetzt aber nicht mehr so genau.
- P: Angenommen Sie sind zum Zeitpunkt $t=0$ im Zustand $|200\rangle$ und schalten die Störung plötzlich an, was erhalten Sie?
- I: Ich verwende die Sudden Approximation, heißt ich nehme an, dass die Störung so schnell angeschaltet wird, dass meine Wellenfunktion im alten Zustand bleibt. Ich drücke diesen durch die neuen Energieeigenfunktionen aus und kann dann meine Zeitentwicklung berechnen.
- P: Wissen Sie auswendig, wie die Zustände aussehen?
- I: $|+\rangle = 1/\sqrt{2} (|200\rangle + |210\rangle)$, $|-\rangle = 1/\sqrt{2} (|200\rangle - |210\rangle)$ mit Energieeigenwerten Δ und $-\Delta$.
- P: Und was erhalten Sie am Ende?
- I: Oszillationen zwischen $|200\rangle$ und $|210\rangle$.
- P: Mit welcher Frequenz?
- I: Haben Sie hier ein bisschen diskutiert. Im Endeffekt meinte er, dass die Oszillation mit der Frequenz $\omega = 2\Delta/\hbar$ stattfindet. Bin mir nicht sicher warum, da ich jetzt auch nach der Prüfung noch denke, dass es $\omega = \Delta/\hbar$ ist.
- P: Kriege ich das auch mit Fermis Goldener Regel?
- I: Da bekomme ich eine t^2 Abhängigkeit, was für kleine Zeiten äquivalent ist, da $\sin^2(\Delta/\hbar t) \sim t^2$ für kleine Zeiten.
- P: Leiten Sie mir bitte die zeitabhängige Störungstheorie im Wechselwirkungsbild her.
- I: Etwas zum WW-Bild gesagt und die Störungsrechnung hergeleitet.
- P: Sie haben jetzt hier ja ziemlich viele Terme. Kann man das auch noch kompakter schreiben?
- I: Ja, ich kann das mit Hilfe des Zeitordnungsoperators auch direkt als e -Funktion schreiben. Dieser sorgt dafür, dass die Hamiltonoperatoren in den Integralen richtig geordnet sind, da i.A. die Hamiltonoperatoren zu verschiedenen Zeiten nicht miteinander kommutieren. Zudem noch erklärt, woher der Faktor $1/n!$ vor dem n -ten Term kommt (durch Umschreiben von den Integralgrenzen zu 0 bis t).
- Hadte hier erst die Wellenfunktion in der Exponentialfunktion stehen.
- P: Eine Wellenfunktion in der Exponentialfunktion? Das ist mir jetzt aber ein bisschen zu viel (grinst)
- I: Stillschweigend aus der e -Funktion rausgeschrieben.
- P: Ah, viel besser! Gehen wir über zum harmonischen Oszillator. Angenommen das System ist im Grundzustand und Sie wollen die Übergangswahrscheinlichkeit in den Zustand $|3\rangle$ wissen, wobei unsere Störung p^4 ist. Gibt es einen Übergang?
- I: In erster Ordnung nicht, da wir in erster Ordnung nur Übergänge in $|2\rangle$ oder $|4\rangle$ haben.
- P: Okay, dann sage ich Ihnen jetzt etwas sinnvolles: Wie ist die Übergangswahrscheinlichkeit in den Zustand $|2\rangle$?
- I: Angefangen p^4 durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren auszudrücken und wollte die Terme ausrechnen. Hat mich zum Glück unterbrochen.
- P: Ich sehe Sie können das. Leiten Sie mir Fermis Goldene Regel her.
- I: Hergeleitet bzw. wurde irgendwann unterbrochen und wir haben über die Näherung zur Delta-Funktion diskutiert. Hatten hier einige Missverständnisse, aber am Ende hat alles gepasst. Habe auch gesagt, dass Fermis Goldene Regel nur im Kontinuum gilt.
- P: Was sind Beispiele für Kontinua?
- I: Radioaktive Zerfälle oder Streuzustände.
- P: Perfekt, was ist wenn ich ein H-Atom für $n=2$ habe und ein Übergang zu $n=1$ passiert. Was ist dann?
- I: Habe hier erst nicht verstanden, auf was er hinauswill. Am Ende habe ich gesagt, dass ein Photon emittiert wird.
- P: Ah! Sie kennen also doch Photonen (lacht). Genau, es wird ein Photon emittiert. Ist das auch ein Kontinuum?
- I: Habe hier dann gesagt, dass unser H-Atom ja nur diskrete Energieniveaus hat und somit unser Photon auch nur diskrete Energiezustände annehmen kann.
- P: Unser Photon kann doch aber kontinuierliche Energien annehmen?
- Haben hier ein wenig diskutiert und war während der Prüfung sehr verwirrt. Im Nachhinein denke ich, dass er darauf hinaus wollte, dass die Spektrallinien ja auch eine gewisse Breite haben (Energie-Zeit-Unschärferelation) und man somit kontinuierliche Zustände erhält.
- P: Wir haben noch etwas Zeit für Relativistik. Wie sieht die Dirac Gleichung in kovarianter Form aus?
- I: Hingeschrieben und die Gammamatrizen und den vierkomponentigen Spinor erklärt.
- P: Kann man sagen, dass Ψ ein Vierervektor ist?
- I: Nein, transformiert anders.
- P: Wie kommt man auf die Transformationsvorschrift?

I: Angesetzt mit $\Psi'(x') = S(\Lambda)\Psi(x)$ und erklärt, dass man die Dirac-Gleichung im gestrichenen und im ungestrichenen System vergleicht.

P: Und wenn ein elektromagnetisches Feld ankoppelt?

I: Dann verwendet man die minimale Kopplung, d.h. der Impuls wird ersetzt durch $p \rightarrow p - qA$. Dirac-Gleichung damit hingeschrieben.

P: Was erhält man im nicht-relativistischen Grenzfall?

I: In 1. Ordnung die Pauli-Gleichung und in zweiter Ordnung die Feinstruktur.

P: Schreiben sie doch bitte die Pauli-Gleichung mal hin.

I: In der Form $p^2/2m - q/2m(L_z + 2S_z)B + q\Phi$ hingeschrieben, wobei ich hier erstmal das B Feld vergeß habe.

P: Das gilt jetzt aber nur für konstante Magnetfelder.

I: Ja, noch allgemeiner ist die Form $(p - qA)^2/2m - q/m S \cdot B + q\Phi$. Auch hier direkt nochmal den Spin-Term vergessen, worauf er mich aufmerksam gemacht hat.

P: Und was erhält man für Antiteilchen?

I: Man bekommt effektiv dieselbe Gleichung mit negativer Masse.

P: Wie kann man das physikalischer interpretieren?

I: Man kann die Feynman-Stückelberg-Interpretation verwenden. Hierbei kann man positive Masse verwenden aber der Impuls, die Ladung und die Zeit wird umgedreht.

P: Genau. Gehen wir über zu Theo Fa. Können sie mir die drei Ensembles, die dazugehörigen thermodynamischen Potentiale und Größen nennen, die man verwendet.

I: Das Mikrokanonische Ensemble ist ein System mit fester Teilchenzahl und fester Energie. Beim kanonischen Ensemble ist unser System an ein Wärmebad gekoppelt, wodurch die Energie durch den Mittelwert der inneren Energie gegeben ist und beim großkanonischen Ensemble koppeln wir zusätzlich noch an ein Teilchenb.

Beim kanonischen Ensemble verwenden wir die freie Energie F und T, V, N und beim großkanonischen Ensemble das großkanonische Potential. Beim mikrokanonischen Ensemble verwendet man die innere Energie...

Hier hat er kurz unterbrochen, aber nach kurzen Nachdenken nachgelassen.

P: Ja, okay das können Sie so auch machen. Und weiter?

I: Hier verwende ich die Größen N, V und ... ja gut T kann ich ja nicht nochmal nehmen, das wäre blöd.

P: (lacht) das stimmt. Was ist denn die konjugierte Variable zur Temperatur?

I: Die Entropie, also verwenden wir N, V, S im mikrokanonischen (Die Entropie ist ja als fest gewählt im mikrokanonischen Ensemble).

P: Wie sieht die Dichtematrix im Großkanonischen aus?

I: Hingeschrieben.

P: Leiten Sie doch bitte die Zustandssumme für Bosonen her.

I: Hergeleitet und auf die Besetzungszahldarstellung und Zustände im Fock-Raum eingegangen.

P: Über welche Zustände summiert man hier? (zeigt auf $H|n_\lambda\rangle = \sum_\lambda E_\lambda n_\lambda |n_\lambda\rangle$)

I: Über die jeweiligen Bosonen.

P: Nicht ganz.

Habe hier erst nicht verstanden was er meinte, irgendwann bin ich drauf gekommen.

I: Man summiert über den Spin und den Impuls der Bosonen.

P: Angenommen Sie haben nicht-relativistische Bosonen mit Spin 1 in einer Dimension und eine mittlere Besetzungszahl von 5,5 bei einer Energie von 1J. Wie viele Bosonen sind in diesem Zustand.

I: Habe erstmal ohne groß nachzudenken 5,5 gedacht.

P: Nein, sie haben nicht-relativistische Bosonen mit Spin 1 in einer Dimension.

I: Ah, wegen $2s+1=3$ und Impuls in $+x$ und $-x$ Richtung sind es insgesamt 33 Bosonen in diesem Zustand.

P: Genau! Und für Bosonen mit halbzahligem Spin (grinst)?

I: (Grinsend) Dann sind es keine Bosonen mehr.

P: Okay, gehen wir über zur Bose-Einstein-Kondensation. Wann haben wir BEK?

I: Wenn das Integral über die Teilchenzahl konvergiert sind die Bosonen gezwungen in den Grundzustand überzugehen und man erhält eine makroskopische Besetzung.

P: Für welche Werte von μ muss das Integral konvergieren?

I: $\mu=0$.

P: Wie sieht das chemische Potential in Abhängigkeit der Temperatur für Bosonen und Fermionen aus?

I: In einen Graphen eingezeichnet. Bei Bosonen bis zur kritischen Temperatur $\mu=0$, dann $\sim (T-T_C)^2$ und für hohe Temperaturen $\sim -T \ln(T)$. Bei Fermionen bei $T=0$ Fermi-Energie, für niedrige Temperaturen auch $\sim -T^2$ und für hohe Temperaturen $\sim -T \ln(T)$.

Habe die Graphen erst so eingezeichnet, dass sie sich schneiden.

P: Das gefällt mir jetzt gar nicht. Für hohe Temperaturen müssen die beiden Fälle doch gleich sein.

I: Korrigiert, sodass das chemische Potential für Fermionen immer größer als das von Bosonen ist, sich aber für hohe Temperaturen an dieses anschmiegt.

Wurde dann rausgeschickt und nach maximal 10 Sekunden wieder reingeholt.