

Fach: Theoretische Physik		
PrüferIn: Shnirman		
<input checked="" type="radio"/> BP <input type="radio"/> NP <input type="radio"/> SF <input type="radio"/> EF <input type="radio"/> NF <input type="radio"/> LA	Datum: 26. April 2019	Fachsemester: 7
Welche Vorlesungen wurden geprüft? Theo D, Theo E, Theo F		
Welche Vorlesung der PrüferIn hast Du gehört? Theo F		

## Zur Vorbereitung

Absprache mit PrüferIn über folgende Themengebiete: -
Absprache mit PrüferIn über Literatur/Skripte: -
<p>Verwendete Literatur/Skripte: Theo D: Skript bzw. Vorlesungsmitschrieb von Prof. Schmalian;</p> <p>Theo E: Skript bzw. Vorlesungsmitschrieb von Prof. Steinhauser;</p> <p>Theo F: Folien bzw. Vorlesungsmitschrieb von Prof. Shnirman, teilweise Skript von Prof. Schön;</p> <p>Für Theo D und E allgemein: Nolting 5.1 und 5.2; Schwabl QM 1 &amp; QM 2;</p> <p>Für Theo F allgemein: Nolting 6, Schwabl Statistische Physik, Fließbach Statistische Physik</p> <p>Speziell für Wellenpakete: Cohen-Tannoudji (+ Schwabl)</p> <p>Speziell für Dirac-See &amp; Feynman-Stückelberg: Rebhan Theoretische Physik (Relativistische Quantenmechanik)</p> <p>Speziell für Teilchen auf dem Ring mit Solenoid: Griffiths Quantenmechanik</p>
Dauer der Vorbereitung: ca. 6 bis 7 Wochen, am Anfang eher weniger, zum Ende hin intensiver
Art der Vorbereitung: alleine, viel in der Fachliteratur gelesen, in der letzten Woche vor der Prüfung mehrfach abgefragt
Allgemeine Tips zur Vorbereitung: Unbedingt die Protokolle durchgehen. Prof Shnirman lässt einige Themen (wie Streutheorie) komplett weg, andere kommen (wie ihr sehen werdet) ziemlich sicher dran, diese sollten sitzen. Außerdem sollten wichtige Ergebnisse (Zeitentwicklung, Fermis Goldene Regel, Stark Effekt, LS-Hamiltonian, Wasserstoffproblem, etc.) auswendig sitzen. Lasst euch auf jeden Fall häufig abfragen, damit ihr das Präsentieren lernt. Physikalische Gründe sind mindestens genauso wichtig wie die mathematische Herleitung.

## Zur Prüfung

<p>Wie verlief die Prüfung? Sehr flüssig, wie ein wirkliches Gespräch. Die Nervosität war nach wenigen Minuten weg und die Atmosphäre war sehr entspannt. Er hat teilweise sogar Witze gemacht. Ich hing an einigen Stellen, oft weil ich einfach nicht wusste, worauf er hinaus wollte bzw. die Frage nicht verstanden habe. Er hat mit manchen Fragen versucht, mich zu verunsichern (was er auch mehrfach dann in der Prüfung exakt so gesagt hat) und wollte nur überzeugt werden. Lasst euch also nicht abbringen, wenn ihr denkt, dass eure Lösung richtig ist!</p>
---

Wie reagierte die PrüferIn, wenn Fragen nicht sofort beantwortet wurden? Er hat das Problem umformuliert bzw. ein (anderes) Beispiel gegeben oder sogar mit einem anderen Ansatz weiter gemacht, bis ich auf die Lösung kam. Er bleibt dabei immer geduldig und ruhig und versucht zu helfen, wo es geht. Wenn man gar nicht weiter kommt, gibt er Zwischenschritte oder Lösungen an und geht alles nochmal durch.

Kommentar zur Prüfung: Sehr zu empfehlen. Man kann sich gut vorbereiten, da er oft gleiches fragt. Auf den Einstieg kann man sich super vorbereiten, weil der auch immer fast gleich verläuft. Dadurch flaut die Nervosität schnell ab.

Kommentar zur Benotung: 1.0 :- ) Super zufrieden!

Die Schwierigkeit der Prüfung: Manchmal ist es schwierig, die Fragen von Prof Shnirman zu verstehen und dann das zu antworten, was er hören möchte. Ist aber auch nicht schlimm, wenn man mehrere Ansätze braucht. Bezüglich der Themen war Teilchen auf dem Ring statistisch zu rechnen für mich eine Herausforderung.

## Die Fragen

P: Prüfer

I: Ich

P: Schreiben Sie die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung auf.

I:  $i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H \Psi$ , wobei  $H$  der Hamilton-Operator ist. Der ist hermitesch, d.h. dass  $H = H^\dagger = H^*$  komplex konjugiert und transponiert. Die Eigenwerte sind reell und die Eigenfunktionen orthogonal.

P: Können Sie das zeigen?

I: gezeigt

P: Was können Sie mir zu  $\Psi$  sagen?

I: Zustandsvektor im Hilbertraum, beschreibt ein Teilchen.

P: Was für Hilberträume kennen Sie?

I:  $L^2$  - Raum der quadratintegrierbaren Funktionen, Spin.

P: Okay gut. Wie würden Sie das Problem (die Schrödinger-Gl) jetzt lösen, wenn  $H$  zeitabhängig ist?

I: Dann entwickle ich erstmal  $\Psi$  in Eigenzuständen.

P: Moment... Der Hamiltonian ist hier aber zeitabhängig.

I: Ja, dann benötige ich eben den Zeitentwicklungsoperator für einen zeitabhängigen Hamiltonian.

P: Schreiben Sie den doch mal hin.

I:  $U = T * \exp[-i/\hbar \int dt' H(t')]$ , wobei hier eigentlich die Dyson-Reihe steht.

P: Eigentlich kennt man die Dyson-Reihe ja aus dem WW-Bild mit einem Hamiltonian mit Störung  $V(t)$ .

Gilt die Zeitentwicklung jetzt für Ihren Zustand  $\Psi$  trotzdem, auch wenn Sie hier jetzt nicht direkt eine Störung haben?

I: Ja, natürlich. Wieso auch nicht? Der Hamiltonian ist hier einfach zeitabhängig.

P: Ich versuche nur Sie zu verwirren. Was sie gesagt haben war richtig. Was ist  $T$  jetzt hier?

I: Der Zeitordnungsoperator. Der ordnet die Hamiltonian in der Exponentialfunktion, weil diese im Allgemeinen bei unterschiedlichen Zeiten nicht vertauschen.

P: Was passiert für den Zeitentwicklungsoperator, wenn  $H$  jetzt doch zeitunabhängig ist?

I: Dann bekomme ich einfach  $U(t,0) = \exp[-i/\hbar H t]$ .

P: Wie können Sie nun die Schrödinger-Gleichung für einen zeitabhängigen Hamiltonian lösen?

I: Ich entwickle die Wellenfunktion jetzt zeitlich mit dem Zeitentwicklungsoperator,  $\Psi(t) = U(t,0) \Psi(0)$ ,

und nun in der Eigenbasis des Hamilton-Operators,  $|\Psi(t)\rangle = U(t,0) |\Psi(0)\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n| \Psi(0)\rangle = \sum_n \langle n| \Psi(0)\rangle U(t,0) |n\rangle$ .

P: Und wenn für einen zeitunabhängigen Hamiltonian?

I: Da verwende ich dann den Zeitentwicklungsoperator (ich hab dann auf die Lösung, die ich oben schon berechnen musste, gezeigt) und da  $H$  hier zeitunabhängig ist, kann ich die stationäre Schrödinger-Gleichung anwenden und bekomme gerade die Energie:  $|\Psi(t)\rangle = \sum_n \langle n| \Psi(0)\rangle \exp[-i/\hbar E_n t] |n\rangle$ .

P: Was hat das ganze jetzt mit Wellenpaketen zu tun?

I: Also mein  $\Psi$  muss ja im Raum der quadratintegrierbaren Funktionen liegen und das tut es für ein freies Teilchen nicht.

P: Moment. Was genau ist jetzt nicht quadratintegrierbar?

I: ... Habe hier erst ein bisschen rumgestammelt, weil ich nicht so ganz wusste, was er hören wollte. Habe dann aber recht schnell gesagt, dass die Lösung, also die ebene Welle eben nicht normierbar ist und deswegen nicht im  $L^2$  liegt.

P: Ahaaaa, also liegt die Eigenfunktion des Hamiltonian nicht im  $L^2$ .

I: Genau. Deswegen betrachte ich eine Superposition von ebenen Wellen, was dem Wellenpaket entspricht. (Habe dann das Wellenpakete hingeschrieben). Hier ist  $g(\text{Vektor}_k)$  die Amplitude und  $\omega(\text{Vektor}_k) = (h_{\text{quer}} k^2)/2m$ . Das Wellenpaket ist nun genau dann quadratintegabel, wenn  $g(k)$  quadratintegabel ist.

P: Ok, wir haben jetzt den Schwerpunkt und die Geschwindigkeit des Wellenpakets im Ortsraum gegeben. Was können Sie mir jetzt über das Wellenpaket im Impulsraum sagen? Die eindimensionale Betrachtung reicht mir.

I: Hierfür schreibe ich die Phase erstmal als  $g(k) = |g(k)| \cdot \exp(i \alpha(k))$ , das kann ich mathematisch erstmal mit jeder Zahl so machen. Um den Schwerpunkt zu finden, brauche ich ein maximales  $\Psi(x,t)$ , d.h. das Integral muss maximal sein. Dann kann ich mir hierfür den Exponenten der Exponentialfunktion genauer anschauen und das Prinzip der stationären Phase anwenden. (Dann habe ich angefangen, etwas zu zeichnen.) Ich zeichne zuerst die Amplitude  $|g(k)|$  als annähernd gaußförmige Kurve im positiven und negativen Bereich. Das ist jetzt dann meine Einhüllende. Jetzt zeichne ich dann den Realteil von  $[ |g(k)| \exp[ i (kx - \omega t + \alpha) ] \dots$

P: Ja, ok. Ich glaube Ihnen, dass sie das können. Schreiben Sie doch mal das Endergebnis hin.

I: Ich muss jetzt eben  $(kx - \omega t + \alpha)$  nach  $k$  ableiten und Null setzen, da ich ja einen Extrempunkt / Sattelpunkt etc. suche. Dann erhalte ich  $0 = x_0 - \partial \omega / \partial k$  (für  $k = k_0$ )  $\cdot t + \partial \alpha / \partial k$  (für  $k = k_0$ ). Für  $t = 0$  erhalte ich aus dem Schwerpunkt im Ortsraum also gerade eine Information über die Phase der Amplitude im  $k$ -Raum. Die Ableitung von  $\omega$  nach  $k$  entspricht außerdem gerade der Gruppengeschwindigkeit.

P: Ok. Und was können Sie mir über die Dispersion sagen?

I: Naja, das kommt auf die Dispersionsrelation an. Ob ich eben relativistisch oder nicht-relativistisch betrachte. Das lässt sich jetzt dann eben auch ausrechnen, indem man Gruppen- und Phasengeschwindigkeit vergleicht. (Hier dann die kurze Zwischenfrage, wie man die Phasengeschwindigkeit berechne;  $v_{\text{Ph}} = \omega / k$ ) Für das relativistische Teilchen ist die Dispersionsrelation gerade  $\omega = c \cdot k$ . Das kann ich nun berechnen ...

P: Nein nein, das ist zwar richtig, aber darauf will ich nicht hinaus. Was kann man denn über die Form aussagen? Man sagt manchmal auch, dass etwas zerfließt.

I: Im relativistischen Fall ist es nun eben so, dass Phasen- und Gruppengeschwindigkeit gleich sein ( $v_{\text{gr}} = c$ ,  $v_{\text{ph}} = c$ ). Beim nicht-relativistischen Fall ist allerdings die Gruppengeschwindigkeit doppelt so groß wie die Phasengeschwindigkeit ( $v_{\text{gr}} = h_{\text{quer}} k / m$ ,  $v_{\text{ph}} = h_{\text{quer}} k / (2 \cdot m)$ ), d.h. das Wellenpaket zerfließt.

P: Das stimmt mathematisch. Aber wieso ist das physikalisch so?

I: Die Phasengeschwindigkeit beschreibt die Geschwindigkeit der einzelnen Wellen und die kommen eben langsamer mit als der Schwerpunkt, also wird die Kurve breiter (Ich hatte hier nicht wirklich Ahnung und habe geraten, war aber wohl irgendwie richtig / zufriedenstellend)

P: Sehr gut. Dann betrachten wir jetzt mal das Wasserstoffproblem. Schreiben Sie doch mal den Hamiltonian in der Schwerpunktskoordinate hin. (Ich war hier zunächst etwas überrascht, weil er ja sonst immer direkt den in Relativkoordinaten fragt. Ist ja aber auch nicht weiter schwierig).

I: hingeschrieben. Das ergibt dann jetzt beim Einsetzen in die Schrödinger-Gleichung gerade eine ebene Welle.

P: Ok, dann betrachten wir hier nur noch den Hamiltonian in Relativkoordinaten.

I: allgemein hingeschrieben und gesagt, dass „ $r$ “ jetzt hier für die Relativkoordinate steht.

P: Und was ist „ $m$ “?

I: Die reduzierte Masse, also  $m = m_e \cdot m_p / (m_e + m_p)$ . Für eine sehr große Masse des Protons entspricht das ungefähr der Masse des Elektrons.

P: Ok, was ist denn jetzt hier unser v.S.k.O. (Vollständiges System kommutierender Observablen)?

I: Wir haben  $H$ ,  $L^2$ ,  $L_z$  als Operatoren mit den den Quantenzahlen  $n$ ,  $l$ ,  $m_l$ . Wenn ich nun alle drei Quantenzahlen verwende, dann kann ich jede Wellenfunktion eindeutig von jeder anderen unterscheiden.

P: Das Energiespektrum kennen Sie sicher auch...

I: Ja,  $E_n = -Z^2 R_0 / n^2$  mit der Rydberg-Energie  $R_0$

P: Was ist hier  $Z$ ?

I:  $Z$  ist die Kernladungszahl und beim Wasserstoffatom ist gerade  $Z=1$ .

P: Und wie ist die Entartung?

I: Wir haben Entartung in den Quantenzahlen  $l$  und  $m_l$ . Also betrachten wir  $\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m_l = -l}^l 1 = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2$ . Falls wir noch den Spin miteinbeziehen, bekommen wir  $2n^2$ .

P: Was kann man nun tun bzw. was macht die Natur, um die Entartung aufzuheben?

I: Hyperfeinstruktur, also Betrachtung des Kernspins des Protons; Feinstruktur mit dem Korrekturterm aus der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung, der Spin-Bahn-Kopplung und dem Darwin-Termin; Anlager äußerer Felder: E-Feld heißt Stark-Effekt, B-Feld heißt Zeemann-Effekt; außerdem gibt es noch dem Lamb-Shift der irgendwie aus Vakuumfluktuationen resultiert.

P: Ahhhh und Sie können mir jetzt den Lamb-Shift hier vorrechnen? (Er hat an dieser Stelle gegrinst, also war es klar, dass es eher als Scherz gemeint war)

I: Nein, wir haben den nur sehr kurz in Experimentalphysik angeschnitten.

P: Ok, dann machen wir mal den Stark-Effekt. Machen Sie mal den quadratischen Stark-Effekt. Brauchen Sie hier den Spin?

I: Nein. Elektrisches Feld und Spin koppeln nicht.

P: Genau. Dann machen Sie mal.

I: Die Störung ist dann gerade  $V = -e \text{ Vektor}(E) * \text{Vektor}(x)$ . ich wähle das E-Feld in z-Richtung, also bekomme ich  $V = -e E_z * z$ . Der quadratische Stark-Effekt tritt gerade bei  $n=1$  auf, da dann  $E_z$  quadratisch auftaucht. Zunächst leite ich jetzt mal Auswahlregeln für meine Basis  $|n\ l\ m_l\rangle$  her.

Als erstes benutze ich da, dass der Kommutator  $[L_z, z] = 0$ . Ich erhalte dann  $\langle n\ l\ m_l | [L_z, z] | n\ l'\ m'_l \rangle = 0$ . Da  $L_z$  hermitesch, kann ich es nun einmal nach rechts und einmal nach links wirken lassen, sodass ich  $0 = h_{\text{quer}} (m'_l - m_l) * \langle n\ l\ m_l | z | n\ l'\ m'_l \rangle$  bekomme. Da wir nicht wollen, dass das Matrixelement Null wird, muss  $m_l = m'_l$  gelten.

P: Naja, also es wäre doch toll, wenn das Matrixelement Null wird, dann wäre ja alles sehr einfach. Aber das kommt nun mal nicht raus. Es ist also nicht, dass wir das nicht wollen, sondern dass wir einfach alle Lösungen betrachten wollen. Machen Sie mal weiter.

I: Als nächstes verwende ich die Parität. Ich nutze aus, dass die Parität der Kugelflächenfunktionen durch  $P Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta, \phi)$  gegeben ist.

P: Was genau ist denn Parität.

I: Wenn ich den Paritätsoperator auf  $\Psi(x)$  anwende bekomme ich gerade  $\Psi(-x)$ . Er dreht also den Ort um.

P: Ja genau. Machen Sie weiter.

I: Ich berechne nun also  $\langle n\ l\ m_l | z | n\ l'\ m'_l \rangle = \langle n\ l\ m_l | P^2 z | n\ l'\ m'_l \rangle$ , wobei ich ausnutze dass  $P^2 = 1$ . Jetzt kann ich das P am z vorbei ziehen bzw. darauf wirken und bekomme gerade  $-z$ :  $\langle n\ l\ m_l | z | n\ l'\ m'_l \rangle = \langle n\ l\ m_l | P z P | n\ l'\ m'_l \rangle$ . Jetzt nutze ich, dass P hermitesch ist, also kann ich das linke P auch nach links wirken, nutze die Parität der Kugelflächenfunktionen und bekomme gerade  $\langle n\ l\ m_l | z | n\ l'\ m'_l \rangle = (-1)^{l+l'+1} \langle n\ l\ m_l | z | n\ l'\ m'_l \rangle$ . Da ich auf der linken Seite eine 1 und auf der rechten eine -1 stehen habe, muss der Exponent gerade sein. Da eine gerade Zahl -1 immer eine ungerade Zahl ergibt, bekomme ich gerade  $l+l'$  ungerade. Jetzt brauche ich noch die Kommutator-Antikommutator-Relation  $[L^2, [L^2, \text{Vektor}(R)]] = 2 h_{\text{quer}}^2 \{L^2, \text{Vektor}(R)\}$ .

P: Aber wieso? Ich hätte gleich bei  $l+l'$  ungerade aufgehört. Was versuchen Sie hier zu zeigen.

I: ich möchte das noch ein bisschen präziser. Ich möchte auf  $l' = l + 1$  kommen.

P: Ja dann glaube ich Ihnen, dass das raus kommt. (Hier hat Prof Shnirman dann auch gewitzelt, dass er jetzt endlich verstanden habe, wie das funktioniert :D) Was machen wir jetzt bei  $n=1$ ?

I: Wir brauchen nicht-entartete Störungstheorie. Für die Energiekorrektur erster Ordnung bekommen wir Null wegen der Auswahlregeln. Also betrachten wir die Energiekorrektur zweiter Ordnung. Da hab ich dann noch kurz erklärt, dass wegen der Auswahlregeln nur Elemente  $\langle k\ 1\ 0 | V | 1\ 0\ 0 \rangle$  beitragen können und man dann eben die Summe ausführen muss und man den quadratischen Stark-Effekt erhält.

P: Ok, dann betrachten wir jetzt  $n=2$ . Aber ich will wissen, was passiert, wenn wir das E-Feld plötzlich einschalten. Wir befinden uns am Anfang in  $|200\rangle$ .

I: Dann brauchen wir Sudden Approximation, gehen also davon aus, dass das gestörte System zum Zeitpunkt Null noch im selben Zustand ist wie das ungestörte. Ich entwickle dann zunächst den Zustand im gestörten System mit dem Zeitentwicklungsoperator. In dem steht jetzt dann  $H = H_0 + V(t)$ . Dann entwickle ich  $|\Psi, 0\rangle$  in Eigenzuständen des Hamiltonian. Die müsste ich jetzt eigentlich für das gestörte System neu ausrechnen, indem ich entartete Störungstheorie betreibe und die Matrix diagonalisiere. Ich kenne allerdings die gestörten Zustände und zugehörigen Energien auswendig für  $n=2$ . (Habe sie dann auch hingeschrieben)

P: Und da sind sie sich jetzt sicher.

I: Ja, soll ich sie herleiten?

P: Nein.

I: Ok, dann habe ich  $\Phi_{1/2} = 1/\sqrt{2} (|200\rangle - |210\rangle)$ ,  $\Phi_2 = |2\ 1\ +1\rangle$ . Bei der Entwicklung  $|\Psi(t)\rangle = \sum_n \langle n | \Psi(0) \rangle \exp[-i/h_{\text{quer}} (H_0 + V(t)) t] |n\rangle$  kann ich dann noch die zugehörigen Eigenenergien also sowohl die zu  $H_0$  ( $E^{(0)}_2 = -R_0/4$ ) als auch die zu  $V(t)$  ( $E^{(1)}_2 = +3 e a_0 E_z$ ), die einfach den Energiekorrekturen entsprechen, einsetzen und dann alles ausrechnen.

P: Was bekomme ich dann?

I: Eine Oszillation mit  $(3 e a_0 E_z / h_{\text{quer}})$ .

P: Und was hätte ich jetzt mit Fermis Goldener Regel bekommen?

I: Also mit zeitabhängiger Störungstheorie bekomme ich eben genau eine Entwicklung der exakten Lösung. Ich kann ja hier sowieso nur Übergangswahrscheinlichkeiten berechnen, d.h. ich bräuchte noch einen Anfangszustand.

P: Da käme ja nur einer in Frage, oder?

I: Naja, ich könnte auch weiterhin im Zustand  $|200\rangle$  sein, dann würde ich eben gerade eine 1 bekommen, die der Entwicklung des cos in 1. Ordnung entspricht. Wenn ich in  $|210\rangle$  will, dann gerade  $t^2$ , was der Entwicklung des sin in 1. Ordnung, den man quadriert, entspricht. (Ich habe hier dann nochmal die exakte Lösung des gestörten Systems hingeschrieben,  $|\Psi(t)\rangle = A \cos((3 e a_0 E_z t / h_{\text{quer}}) |200\rangle + B \sin(3 e a_0 E_z t / h_{\text{quer}}) |210\rangle$ )

P: Das ist doch jetzt aber die exakte Lösung?

I: Ja genau, daran sehe ich dann, dass ich eben - je nachdem in welchen Zustand ich im gestörten System will - eben eine Entwicklung der exakten Lösung bekomme.

P: Ja das ist natürlich richtig. Schreiben Sie Fermis Goldene Regel doch einfach mal hin.

I: hingeschrieben,

P: Wieso habe ich denn nun bei Fermis Goldener Regel bzw. der Übergangswahrscheinlichkeit nur eine t-Abhängigkeit, die haben mir für den Übergang von  $|200\rangle$  auf  $|210\rangle$  aber ein  $t^2$  ausgerechnet?

I: Naja, dass bei der Übergangswahrscheinlichkeit für t gegen unendlich gerade eine t-Abhängigkeit rauskommt, liegt ja an der Ersetzung der Funktionenfolge mit der Delta-Distribution.

P: Ja, aber wieso ist das physikalisch so?

I: (Ich habe mich hier um Kopf und Kragen geredet und sogar zwischendrin behauptet, die plötzliche Störung wäre langsam. Darauf hat er aber dann gesagt, dass sie auf jeden Fall schnell ist. Ich kam trotz allem einfach nicht drauf. Prof. Shnirman hat dann versucht, mir mehrere Beispiele zu geben, damit ich darauf komme, bin ich aber einfach nicht.

Er hat dann - lieb wie er nun mal ist - einfach irgendwann gesagt: „Ich will hier auf ein bestimmtes Stichwort hinaus, das sie mir geben müssen.“ Ahh also Fermis Goldene Regel gilt nur für Übergänge ins Kontinuum.

P: Genau. Und was haben Sie nun beim Stark-Effekt?

I: Diskrete Energiezustände.

P: Genau. (Ich muss gestehen, dass ich jetzt immer noch nicht exakt erklären könnte, woher genau der Unterschied kommt.)

P: Gehen wir mal zu Dirac. Schreiben Sie die Dirac-Gleichung in kovarianter Form auf.

I: hingeschrieben. Erklärt, dass Psi ein vierkomponentiger Spinor ist,  $\gamma_\mu$  ein 4-Vektor und Gamma eben die Gamma-Matrizen. Habe dann noch den Antikommutator der Gamma-Matrizen  $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = g_{\mu\nu}$  hingeschrieben und gesagt, dass der halt wichtig sei.

P: Warum ist der Kommutator denn wichtig?

I: Damit ich eben die ganzen Sachen ausrechnen kann (ich hatte nicht wirklich Ahnung). Die Gamma-Matrizen an sich kommen ja aus den  $\alpha$ -Matrizen und der  $\beta$ -Matrix der ursprünglichen Form ( $\gamma_0 = \beta$ ,  $\gamma_k = \beta \alpha_k$  hingeschrieben).

P: Ok, aber das meine ich nicht. Besprechen wir doch einfach mal die ursprüngliche Form.

I: Hingeschrieben. Erklärt, dass  $\alpha$  und  $\beta$  gerade  $4 \times 4$  Matrizen sind und ebenfalls bestimmte Antikommutatoren erfüllen. Erklärt, dass das aus  $\text{Spur}(\alpha_k) = 0$  bzw.  $\text{Spur}(\beta) = 0$  folgt, da die Spur einfach die Summe der Eigenwerte (entsprechen den Diagonalelementen der diagonalisierten Matrix) ist und die Eigenwerte von  $\alpha_k$  und  $\beta_k$  gerade  $+1$  und  $+1$  sind. Da die Spur Null ist, muss die Dimension der Matrizen gerade sein.  $N=2$  geht nicht, da man keine vier antikommutierenden Matrizen hat (sondern nur drei  $\rightarrow$  Pauli-Matrizen). Also ist  $N=4$  das kleinst mögliche.

P: Und wie kommen Sie nun auf die Relationen von Alpha und Beta?

I: Ich wende  $(\mathbf{h} \cdot \nabla / \partial t)$  und  $H$  aus der Dirac-Gl. zweimal an. Dann kann ich meine Gleichung mit der Klein-Gordon-Gl. vergleichen und bekomme die Relationen.

P: Ja genau, aus der Klein-Gordon-Gleichung!

(Das Stichwort, das er hören wollte, war Klein-Gordon-Gleichung. Ich denke, dass er darauf auch mit seiner Frage nach der Vertauschungsrelation und für was diese wichtig sei, hinaus wollte.)

P: Und wie sieht die Dirac-Gleichung dann aus, wenn wir noch ein elektromagnetisches Feld haben? In kovarianter Form bitte.

I: hingeschrieben und kurz das  $A_\mu$  erklärt.

P: Und was bekomme ich jetzt aus dieser Gleichung, wenn ich negative Energien betrachte und nahe der Ruheenergie bin?

I: Die Pauli-Gleichung. Ich schreibe sie einfach mal hin. (Habe dann hier die Pauli-Gleichung hingeschrieben für negative Energien, d.h. statt  $\Phi$  hat man  $\chi$  und  $m \rightarrow -m$ )

P: Sehr gut. Was ist jetzt hier  $\chi$ ?

I: Ein zweikomponentiger Spinor. Der kann zum Beispiel down, up sein.

P: Ja, aber ich meine in Bezug auf das ursprüngliche Psi aus der Dirac-Gl.

I: Die untere Komponente.

P: Jetzt gibt es da ja so eine Interpretation für negative Energien?

I: Ja, Feynman-Stückelberg: Ein Teilchen mit negativer Energie, das sich vorwärts in der Zeit bewegt und positiven Impuls hat, entspricht einem Antiteilchen (entgegengesetzte Ladung) mit positiver Energie, das sich rückwärts in der Zeit bewegt und negativen Impuls hat.

P: Und wie hat Dirac das ganze gelöst?

I: Dirac hat eben auch erkannt, dass es negative Energien gab und diese zwangsläufig zu einer Strahlung führen müssen. Ein Teilchen könnte nämlich einfach von positiver Energie immer tiefer fallen, sodass immer mehr Energie frei werden würde. Dies widerspricht der Energieerhaltung. Er hat dann den Dirac-See postuliert. Alle Zustände mit negativer Energie seien besetzt, sodass wegen des Pauli-Verbots kein Teilchen mehr von positiven in negative Energiezustände fallen könnte. Wenn nun aber ein Teilchen nur

Absorption eines Photons von einem negativen in einen positiven Energiezustand angehoben wird, dann entsteht ein Loch bzw. ein Antiteilchen.

P: Gut gut. Wie komme ich jetzt von der Dirac-Gleichung auf das Wasserstoffproblem.

I: Also in zweiter Ordnung  $v/c$  bekommen wir die Feinstruktur. Das ist die Foldy-Wouthuysen Transformation.

P: Und die kennen Sie?

I: Nein. (Mir war auch hier klar, dass er nicht erwartet hat, dass ich die kenne)

P: Da wir noch so viel Zeit haben, gehen wir zurück zur Quantenmechanik. Wir betrachten jetzt ein Teilchen auf dem Ring mit einem Solenoid in der Mitte. Das B-Feld ist also ortstechnisch beschränkt. Was für eine Energie bekommen Sie dann?

I: (Habe direkt die Energie für ein Teilchen auf dem Ring ohne Solenoid hingeschrieben, er wollte aber, dass ich alles herleite) Ich habe hier ja ein freies Teilchen, also habe ich  $H = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$ . Jetzt schreibe ich  $\nabla$  in Kugelkoordinaten um und erhalte wegen  $\theta = \pi/2$  und  $r = R$  dann einfach  $\nabla = \frac{1}{R} \partial_{\phi}$  (wobei  $\nabla$  in  $e_{\phi}$ -Richtung zeigt).

P: Ja, so kann man es auch machen. Ich hätte jetzt Polarkoordinaten genommen. Aber machen Sie mal weiter.

I: Wenn ich das in den Hamiltonian einsetze bekomme ich gerade die Gleichung für ein freies Teilchen und kann die ebene Welle als Lösung annehmen, also  $\Psi(x) = A e^{i l \phi}$ . Die Normierungskonstante  $A$  bekomme ich dann eben beim Normieren der Wellenfunktion, also beim Integrieren von  $0$  bis  $2\pi$  über  $d\phi$ . Es folgt  $A = 1/\sqrt{2\pi}$ . Über das „ $l$ “ im Exponenten kann ich dann eine Aussage treffen, wenn ich die Periodizität betrachte, also  $\Psi(\phi) = \Psi(\phi + 2\pi)$ . Da erhalte ich, dass  $l$  eine ganze Zahl sein muss. Jetzt kann ich meine Wellenfunktion in die stationäre Schrödinger-Gleichung einsetzen und erhalte eine Energie:  $E = \frac{\hbar^2 l^2}{2mR^2}$ .

Wenn ich jetzt einen Solenoiden habe, dann habe ich zwar kein B-Feld auf dem Ring, aber das Vektorpotential verschwindet nicht. Ich betrachte also einfach mal das Vektorpotential auf dem Ring, indem ich das Kreisintegral über  $\text{Vektor}(A) \cdot d\text{vektor}(s)$  berechne. Da  $A$  und das Linienelement in dieselbe Richtung zeigen ( $e_{\phi}$ -Richtung) bekomme ich einfach  $|\text{Vektor}(A)| \cdot 2\pi R = |A| \cdot 2\pi R$  (da bei uns  $r = R$ ).

P: Sie haben jetzt hier aber angenommen, dass das Vektorpotential kontinuierlich auf dem Ring ist. Dürfen Sie das?

I: Soweit ich weiß ja.

P: Das dürfen Sie auch, aber wieso?

(Ich hatte wirklich keine Ahnung und hab ein bisschen rumgestammelt. Er hat dann aufgelöst, dass ich das im Grunde mit meiner Eichung so wähle.)

I: Ja stimmt. Mit der Coulomb-Eichung  $\nabla \cdot A = 0$ . Zurück zum Integral: Das Kreisintegral lässt sich nun nach Stokes auch als Integral über die Fläche  $d\text{vektor}(f) \cdot (\nabla \times \text{Vektor}(A))$ , also  $\text{rot } A$ , schreiben. Rotation von  $A$  entspricht aber gerade dem B-Feld, d.h. ich habe  $\int B df$  und das ist der magnetische Fluss  $\Phi$ . Ich bekomme also  $|A| = \Phi / (2\pi R)$ . Jetzt benötige ich noch die minimale Kopplung, also kanonischer Impuls wird zum kinetischen Impuls. Das elektrostatische Potential brauche ich hier nicht bzw. es ist Null. Mein Hamiltonian ist jetzt also  $H = \frac{1}{2m} (\text{Vektor}(p) - e/c \text{Vektor}(A))^2$ . Jetzt kann ich den einfach auf meine Wellenfunktion von vorhin anwenden. Eigentlich würde ich jetzt  $p^2$ ,  $p \cdot A$  (=  $A \cdot p$  wegen der Coulomb-Eichung) und  $A^2$  auf  $\Psi$  anwenden. Da ich aber ja weiß, dass  $A$  mir im Grunde nur eine Konstante liefert, erhalte ich die Energie einfach durch Ersetzen der Eigenwerte im Hamiltonian. Der Eigenwert von  $p$  ist dann  $p \Psi = \hbar l / R \Psi$ .

P: Wieso darf ich jetzt dasselbe  $l$  wie vorhin nehmen?

I: Mein Teilchen hat sich ja nicht verändert, also ist es noch dieselbe Wellenfunktion.

P: Ja genau, es würde wieder aus der Periodizität rauskommen.

I: Also ich setze den Eigenwert von  $p$  ein und einfach  $A = \Phi / (2\pi R)$  und erhalte meine neue Energie.

P: Ok, kommen wir zur Statistischen Physik. Sie haben jetzt nicht nur ein Teilchen auf dem Ring, sondern mehrere Teilchen. Sagen wir  $N$  viele Teilchen. Was passiert?

I: Naja die Teilchen werden wechselwirken...

P: Wir gehen davon aus, dass sie das nicht tun. Rechnen Sie mir mal großkanonische Größen zu diesem Problem aus.

I: Ok, .... (ich hatte wirklich erstmal keine Ahnung, wo das ganze hinführen sollte und was ich jetzt genau machen soll). Dann schreibe ich erstmal die Großkanonische Dichtematrix hin. (Habe diese dann hingeschrieben mit dem Operator  $H$  und dem Teilchenzahloperator). Das kann ich ja jetzt umschreiben und stattdessen über alle Mikrozustände summieren und bekomme  $\sum_r \exp[-\beta (E_r - \mu N_r)] |\Psi_r\rangle \langle \Psi_r|$ .

P: Was ist ein Mikrozustand?

I: Der beschreibt einen Zustand des Vielteilchensystems. Am einfachsten ist es, diesen durch die Besetzung  $n_{\lambda}$  der Einteilchenzustände  $\lambda$  und die Gesamtteilchenanzahl  $N$  darzustellen.

P: Dann machen Sie das mal.

I: Ich habe dann  $\sum_r \exp[-\beta (E_r - \mu N_r)] |\Psi_r\rangle \langle \Psi_r| = \sum_N \sum_{\{n_{\lambda}\}} (\text{mit der Bedingung, dass } \sum_i n_{\lambda_i} = N) \exp[-\beta \sum_{\lambda} n_{\lambda} (\epsilon_{\lambda} - \mu)] |\Psi_{\{n_{\lambda}\}}\rangle \langle \Psi_{\{n_{\lambda}\}}|$ , wobei ich hier jetzt verwendet habe, dass  $E_r = \sum_{\lambda} n_{\lambda} \epsilon_{\lambda}$  und  $N_r = \sum_{\lambda} n_{\lambda}$ . Die Energie eines Mikrozustandes entspricht also gerade der Summe über alle Einteilchenenergien multipliziert mit den Besetzungszahlen.

P: Ja, aber wieso stellen Sie das jetzt so dar?

... Es folgte ein kurzes Hin und Her, an das ich mich nicht mehr genau erinnern kann. Irgendwann hat Prof Shnirman dann gesagt, ich solle einfach mal allgemein die Fermi-Funktion herleiten, wir kämen dann danach auf das Problem zurück.

I: Die Fermi-Funktion eines bestimmten  $\epsilon_\lambda$  entspricht im Grunde einfach der mittleren Besetzungszahl für einen bestimmten Einteilchenzustand. Das muss man dann ja über  $n_F(\epsilon_\lambda) = \langle n_\lambda \rangle = \text{Spur}(\rho_G n_\lambda)$  mit der großkanonischen Dichtematrix  $\rho_G$  berechnen. Da steckt dann aber die großkanonische Zustandssumme hin, also berechne ich zuerst die. Es gilt hier  $Z_G = \text{Spur}(\exp[-\beta(H - \mu N)]) = \sum_r \exp[-\beta(E_r - \mu N_r)]$  (wobei hier jetzt kein  $|\Psi_r\rangle \langle \Psi_r|$  steht, da wir die Spur gebildet haben). Dann kann ich jetzt auch hier die Besetzungszahldarstellung wählen und die Mikrozustandsenergie und die Teilchenzahl eines Mikrozustands durch Einteilchenzustände ausdrücken (wie oben). Ich bekomme dann ja eine Summe im Exponenten der Exponentialfunktion. Statt dieser kann ich auch einfach das Produkt der Exponentialfunktionen schreiben. Dann verwende ich noch, dass die  $\sum_N \sum_{\{n_\lambda\}}$  (mit der Bedingung, dass  $\sum_i n_\lambda = N$ ) =  $\sum_{(n_\lambda_1)} \sum_{(n_\lambda_2)} \sum_{(n_\lambda_3)} \dots \sum_{(n_\lambda_N)} \dots$

P: Ja genau!!!! Darauf wollte ich hinaus. Sie können hier auch einfach über die Besetzungszahlen der Einteilchenzustände summieren, da die Teilchen nicht wechselwirken. Ich wollte, dass sie das schon oben so schreiben. Bei welcher Entwicklung brauchen Sie denn die Darstellung mit der Summe über  $N$  und der Summe über die Menge der Besetzungszahlen, so wie sie es dargestellt haben?

I: Also bei der Virialentwicklung verwende ich das. Damit ich dann Fugazität hoch  $N$  und die kanonische Zustandssumme dastehen habe.

P: Genau. In unserem Fall brauchen wir das aber nicht. Sie müssen jetzt im Grunde ja nur noch die Einteilchenzustände die sie vorhin ausgerechnet haben, einsetzen.

I: Genau. (Ich habe dann noch die Zustandsdichte für die Fermi-Funktion hingeschrieben.)

P: Dann können Sie ja danach das Großkanonische Potential aufstellen.

I: Ja mit  $\Omega = -k_B T \ln(Z_G)$ .

P: Jetzt betrachten wir so ein Problem mal für das Wasserstoffatom. Was können Sie dann berechnen?

I: (Hatte wieder überhaupt keine Ahnung) Naja, dann kann ich trotzdem alles genauso ausrechnen.

P: Nein nein, das meine ich nicht. (Ich weiß leider nicht mehr, was er dann gesagt hat, um mir das Problem näher zu bringen. Irgendwann sind wir dann irgendwie darauf gekommen, dass die Teilchen dann ja Spins haben und wir hier ein Magnetfeld betrachten).

I: Naja das ist ja dann irgendwie wie bei Heisenberg- bzw. Ising-Modell. Das heißt ich kann die Magnetisierung mit  $-(\partial F / \partial B)$  und die Suszeptibilität mit  $-(\partial M / \partial H)$  berechnen, wobei das ja hier  $F$  für die Freie Energie ist und nicht  $\Omega$  für das Großkanonische Potential... (wusste dann nicht, wie man das eventuell umschreiben sollte)

P: Ja, aber das ist hier kein Problem, da  $\mu$  und  $N$  konstant sind. (Bin mir bei der Begründung nicht mehr ganz sicher, aber eigentlich geht es nur dann, da  $dF = -P dV - S dT + \mu dN$  und  $d\Omega = -S dT - P dV - N d\mu$ . Wenn jetzt  $N$  und  $\mu$  konstant, dann  $dF = d\Omega$  ... aber keine Ahnung, ob das wirklich richtig ist.)

P: Ok, kommen wir zum Bose-Gas. Schreiben Sie mal die Bose-Funktion hin.

I: getan und hingemalt.

P: Sie haben jetzt ein  $d$ -dimensionales Bose-Gas mit der Dispersionsrelation  $p^6$ . Wann findet denn Bose-Einstein-Kondensation statt bzw. woher weiß ich das?

I: Ich betrachte die Teilchenzahl, also  $N = N_0 + (2s+1)V \int d\epsilon \nu(\epsilon) n_B(\epsilon)$ . Wenn das Integral konvergiert, dann habe ich Bose-Einstein-Kondensation, weil dann makroskopisch viele Teilchen in den Grundzustand kondensieren müssen.

P: Ja also wie ist es hier?

I: Dafür müsste ich die Zustandsdichte ausrechnen.

P: Ja dann machen Sie das.

I: Habe dann mit dem Integral angesetzt, also  $\nu(\epsilon) = \int d^d p / (2\pi \hbar)^d \delta(\epsilon - \epsilon(p))$ . Jetzt muss ich  $d$ -dimensionale Kugelkoordinaten verwenden, also  $d^d p = p^{d-1} dp$  (und irgendwelche Winkelanteile). Dann muss ich  $p^6$  in der Delta-Distribution substituieren und die Substitution im Integral verrechnen. (Habe dann kurz gestockt, weil ich grad etwas überfordert war)

P: Ja ok. Ich denke mit etwas mehr Zeit würden Sie das dann ausrechnen können. Gehen Sie jetzt davon aus, Sie haben die Zustandsdichte. Was nun?

I: Ich setze sie ins Integral ein und schaue, wann es konvergiert.

P: Hmm.. (Er war hier irgendwie noch nicht zufrieden). Wann divergiert das Integral denn?

I: Wenn es eben divergiert ... Ich weiß nicht wirklich, worauf Sie hinauswollen.

P: Was betrachten wir denn hier bei BEK?

I: Ich zeichne es vielleicht mal auf. Habe ich dann gemacht und kurz den Graph erklärt mit der kritischen Temperatur  $T_C$ . Wir betrachten also  $\mu$  gegen unendlich.

P:  $\mu$  gegen unendlich?

I: Ähhh nein, natürlich  $\mu$  gegen Null.

P: Also?

I: Ja, wenn wir  $\mu$  nicht gegen Null laufen lassen, dann können wir auch keine BEK bekommen.

P: Genau, also müssten Sie in dem Integral, das Sie oben für die Teilchenzahl hingeschrieben haben, noch  $\mu$  gegen Null gehen lassen. Für  $\mu = 5$  oder  $\mu = 10$  divergiert es natürlich. Dann hat er mich rausgeschickt und nach höchstens 30 Sekunden wieder reingeholt.