

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Hantian Zhang, Manuel Egner **WS 23/24 – Blatt 01**

Abgabe: Mo., 30.10.2023, 11:00 Uhr; Besprechung: Di., 31.10.2023

1 (*) Harmonischer Oszillator (6 Punkte)

1. [1pt.] Geben Sie den Hamiltonoperator H_0 eines harmonischen Oszillators mit Masse m an.

Nun soll dem Problem ein Kraftfeld hinzugefügt werden, das die Kraft F auf den Massenpunkt m ausübt. Der Hamiltonoperator ist nun gegeben über $H = H_0 + H'$, wobei H' den Beitrag der zusätzlichen Kraft beschreibt:

$$H = H_0 + H' \quad \text{mit} \quad H' = -Fx.$$

2. [1pt.] Berechnen Sie für allgemeines l und k die Matrixelemente $\langle l|H'|k\rangle$, wobei $|l\rangle$ und $|k\rangle$ Eigenzustände des ungestörten harmonischen Oszillators mit Hamiltonoperator H_0 sind. Drücken Sie dafür die Koordinate x durch Auf- und Absteigeoperatoren aus.
3. [2pt.] Benutzen Sie Ihr Ergebnis aus der vorherigen Aufgabe um die Korrekturen der Energieniveaus und Wellenfunktion bis zu einschliesslich zweiter Ordnung in Störungstheorie zu berechnen.
4. [2pt.] Lösen Sie das Problem exakt, indem Sie für den Hamiltonoperator $H = H_0 + H'$ eine quadratische Ergänzung und anschliessend eine geeignete Koorddinatentransformation durchführen. Welche Energieeigenwerte und Eigenzustände ergeben sich?

Solution

1. The Hamiltonian of a harmonic oscillator is given by $H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$.
2. To calculate the matrix elements, we write q in terms of creation and annihilation operators

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger).$$

Therefore, $H' = -F\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger)$. We find the matrix elements as

$$\langle k|H'|l\rangle = -F\sqrt{\frac{\hbar l}{2m\omega}}\delta_{k,l-1} - F\sqrt{\frac{\hbar(l+1)}{2m\omega}}\delta_{k,l+1}.$$

3. We obtain the following results up to second order perturbation theory:

- 0th order: $E_0 = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$, $|\Psi_0\rangle = |n\rangle$.
- 1st order: $E_1 = \langle n|H'|n\rangle = 0$, $|\Psi_1\rangle = \frac{-iF}{m\hbar\omega^2}p|n\rangle$ with $p = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\frac{1}{i}(a - a^\dagger)$.
- 2nd order: $E_2 = -\frac{F^2}{2m\omega^2}$, $|\Psi_2\rangle_{\text{normalized}} = -\frac{1}{2}(\frac{F}{m\hbar\omega^2})^2 p^2|n\rangle$. This state is obtained by applying second order perturbation theory and normalizing the result.

4. By completing the square, we can re-write the Hamiltonian as

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(q - \frac{F}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{F^2}{2m\omega^2}.$$

We observe, that this describes a harmonic oscillator that is shifted by $q_0 = F/m\omega^2$, with energies shifted by $-F^2/2m\omega$. Therefore the exact eigenenergies are given by

$$E = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega - \frac{F^2}{2m\omega^2},$$

with eigenstates

$$|\Psi\rangle = \exp(-ipF/m\hbar\omega^2)|n\rangle \approx |n\rangle - \frac{ipF}{m\hbar\omega^2}|n\rangle - \frac{1}{2}\left(\frac{Fp}{m\hbar\omega^2}\right)^2|n\rangle.$$

2 (*) Freies Teilchen im Heisenberg-Bild (4 Punkte)

Es sei $X_H(t)$ der Ortsoperator zur Zeit t im Heisenberg-Bild. Zeigen Sie, dass für ein freies Teilchen mit der Masse m gilt

$$\Delta X_H(0) \cdot \Delta X_H(t) \geq \frac{\hbar t}{2m}.$$

Hinweis: Für zwei Operatoren A und B gilt

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle i[A, B] \rangle|.$$

Die Zeitabhängigkeit eines Operators im Heisenberg-Bild ist gegeben durch

$$\frac{dO_H}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [O_H, H_H] + (\partial_t O_S)_H.$$

Benutzen Sie diese Relation um eine Differentialgleichung für $X_H(t)$ zu erhalten. Lösen Sie diese für $X_H(t)$.

Solution

The Hamiltonian of a free particle is $H = \frac{P^2}{2m}$.

Let $X_H(0)$ be the position operator at time $t = 0$. $X_H(t)$ then satisfies the following equation:

$$i\hbar \frac{d}{dt} X_H(t) = [X_H(t), H_H(t)] + i\hbar (\partial_t X)_H = [X_H(t), H], \quad (1)$$

where we used $\partial_t X = 0$ and $H_H(t) = H$ as the Hamiltonian is independent of the time. Plugging

$$[X_H(t), H] = i\hbar \frac{P}{m}$$

into Equation (1) we get

$$\frac{d}{dt} X_H(t) = \frac{P}{m},$$

which means

$$X_H(t) = \frac{P}{m}t + X_H(0). \quad (2)$$

Note that in all the above equations P is just the momentum operator in the Schrödinger picture, as $H_H(t) = H$.

We can now use Equation (2) to calculate the commutator of $X_H(0)$ with $X_H(t)$:

$$[X_H(0), X_H(t)] = \frac{t}{m} [X_H(0), P] + [X_H(0), X_H(0)] = \frac{i\hbar t}{m}.$$

Using the uncertainty relation leads to,

$$\Delta X_H(0) \cdot \Delta X_H(t) \geq \frac{1}{2} |\langle i[X_H(0), X_H(t)] \rangle| = \frac{\hbar t}{2m}.$$

3 Freies Elektron im elektrischen Feld

Wir betrachten ein Elektron in einem zeitlich konstanten elektrischen Feld $\vec{\varepsilon} = -\varepsilon \hat{x}$ in $(-x)$ -Richtung, wobei $\varepsilon = |\vec{\varepsilon}|$.

1. Das Elektron soll sich in positive x-Richtung bewegen. Geben Sie den Ausdruck für die Kraft auf das Elektron an. Wie sehen das zugehörige Potential und der Hamiltonoperator aus?
2. Zuerst soll das stationäre Problem gelöst werden. Zeigen Sie, dass sich mit der folgenden Variablentransformation

$$y = \frac{1}{l_{e\varepsilon}}(x + x_E) \quad \text{mit} \quad x_E = \frac{E}{e\varepsilon} \quad \text{und} \quad l_{e\varepsilon} = \left(\frac{2me\varepsilon}{\hbar^2} \right)^{-\frac{1}{3}}$$

das Eigenwertproblem $H\Psi = E\Psi$ zu

$$(\partial_y^2 + y)\Psi(y) = 0$$

vereinfacht.

Die Lösung für diese Differentialgleichung ist

$$\Psi_E(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi e \varepsilon l_{e\varepsilon}}} \text{Ai} \left(-\frac{x + \frac{E}{e\varepsilon}}{l_{e\varepsilon}} \right)$$

mit der Airy Funktion $\text{Ai}(-x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\vartheta \cos \left(\frac{\vartheta^3}{3} - \vartheta x \right)$.

Eine zweite Möglichkeit, dieses Problem zu lösen, ist, das konstante elektrische Feld durch das Vektorpotential $\vec{A}$ und das Skalarpotential φ auszudrücken. Wir wählen $\varphi = 0$, wodurch sich das Vektorpotential über den Zusammenhang $\vec{\varepsilon} = -\partial_t \vec{A}$ ergibt.

3. Geben Sie die Schrödinger Gleichung für ein geladenes Teilchen mit Ladung $q = -e$ in einem elektromagnetischen Feld an. Setzen Sie dann $\varphi = 0$, bestimmen Sie das Vektorpotential über $\vec{\varepsilon} = -\partial_t \vec{A}$ und lösen Sie die Schrödinger-Gleichung.

Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz $\Psi_p(x, t) = X_p(x)\varphi_p(t)$ für die Wellenfunktion.

Nun wollen wir die Beziehung zwischen den beiden Lösungen, $\Psi_E(x, t) = \Psi_E(x) \exp(-\frac{i}{\hbar}Et)$ (stationäre Lösung mit Zeitentwicklungsoperator) und $\Psi_p(x, t)$ (nicht-stationäre Lösung), finden.

4. Finden Sie die Eichtransformation, die die Hamiltonoperatoren der beiden Teilaufgaben ineinander überführt. Geben Sie die Ausdrücke für die transformierten Felder und Wellenfunktionen, A', φ' and $\Psi'_p(x, t)$, an.
5. Die beiden Lösungen $\Psi'_p(x, t)$ und $\Psi_E(x, t)$ sind beides Lösungen der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung des gleichen Hamiltonoperators, sie bilden also jeweils einen vollständigen, orthogonales Satz von Basisvektoren und können dementsprechend ineinander übergeführt werden. Zeigen Sie, dass für den Fall $t = 0$ folgende Beziehung gilt:

$$\Psi_E(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} a_E(p) \Psi'_p(x, 0),$$

$$a_E(p) = \frac{1}{\sqrt{e\varepsilon}} \exp \left[-\frac{ip}{\hbar e\varepsilon} \left(\frac{p^2}{6m} - E \right) \right].$$

Solution

1. The force on the electron is $F = e\varepsilon = -\partial_x V$. Our Potential is therefore $V(x) = -e\varepsilon x$ and the Hamiltonian

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 - e\varepsilon x = \frac{p^2}{2m} - e\varepsilon x$$

2. We start with the eigenvalue problem

$$\begin{aligned} H\Psi_E &= E\Psi_E \\ \implies \left[\partial_x^2 + \frac{1}{l_{e\varepsilon}^2}(x + x_E) \right] \Psi_E &= 0 \end{aligned}$$

Using the substitution given above we can calculate

$$\partial_x^2 = (\partial_x^2 y)\partial_y + (\partial_x y)^2 \partial_y^2 = \frac{1}{l_{e\varepsilon}^2} \partial_y^2$$

and our equation simplifies to

$$(\partial_y^2 + y)\Psi_E = 0.$$

3. The Hamiltonian is

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\varphi = \frac{(\vec{p} + e\varepsilon t)^2}{2m} = H(t)$$

with $q = -e$, $\vec{\varepsilon} = -\partial_t \vec{A} \implies \vec{A} = -\vec{\varepsilon}t$ and $\varphi = 0$. We solve the time dependent Schrödinger equation $i\hbar\partial_t\Psi(x, t) = H\Psi(x, t)$ with the following ansatz

$$\Psi_p(x, t) = e^{\frac{i}{\hbar}px}\varphi_p(t).$$

This leads to the following differential equation for $\varphi_p(t)$

$$i\hbar\partial_t\varphi_p(t) = \frac{(p + e\varepsilon t)^2}{2m}\varphi_p(t)$$

with the solution $\varphi_p(t) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' \frac{(p + e\varepsilon t')^2}{2m}\right]$ and therefore our total solution are the so called Houghon functions

$$\Psi(x, t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(px - \int_0^t dt' \frac{(p + e\varepsilon t')^2}{2m}\right)\right].$$

Solution

4. Our Hamiltonian was $H = \frac{1}{2m}(\vec{p} + e\vec{A})^2$ with $\vec{A} = -\vec{\epsilon}t$ and $\varphi = 0$. We want our $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi = 0$ which leads to

$$\nabla\chi = \vec{\epsilon}t = -\epsilon t\hat{x} \implies \chi = -\epsilon tx$$

We can define now our gauge transformed scalar field and there from the potential of our system

$$\varphi' = \varphi - \partial_t\chi = \epsilon x \implies V(x) = q\varphi'(x) = -e\epsilon x.$$

The wave function changes to

$$\Psi'_p = \Psi_p \exp\left[\frac{iq}{\hbar}\chi\right] = \Psi_p \exp\left[\frac{ie}{\hbar}\epsilon tx\right]$$

and is the solution to the Hamiltonian $H' = \frac{p^2}{2m} - e\epsilon x$, which is exactly the same as the one from part a).

5. We start with $\Psi_E(x, 0)$

$$\begin{aligned}\Psi_E(x, 0) &= \frac{1}{\sqrt{\pi e\epsilon}} \frac{1}{l_{e\epsilon}} \text{Ai}\left(-\frac{x + \frac{E}{e\epsilon}}{l_{e\epsilon}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{e\epsilon}} \frac{1}{\pi l_{e\epsilon}} \int_0^\infty d\nu \frac{1}{2} \left[e^{i\left[\frac{\nu^3}{3} - \nu\left(\frac{x + \frac{E}{e\epsilon}}{l_{e\epsilon}}\right)\right]} + e^{-i\left[\frac{\nu^3}{3} - \nu\left(\frac{x + \frac{E}{e\epsilon}}{l_{e\epsilon}}\right)\right]} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{e\epsilon}} \frac{1}{2\pi l_{e\epsilon}} \int_{-\infty}^\infty d\nu e^{i\left[\frac{\nu^3}{3} - \frac{\nu E}{e\epsilon l_{e\epsilon}}\right]} e^{-\frac{i\nu x}{l_{e\epsilon}}}.\end{aligned}$$

We now substitute $p = \frac{\hbar\nu}{l_{e\epsilon}}$ which leads to

$$\begin{aligned}\Psi_E(x, 0) &= \frac{1}{\sqrt{e\epsilon}} \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^\infty dp e^{-\frac{ip}{\hbar e\epsilon} \left[\frac{p^2}{6m} - E\right]} e^{-\frac{i}{\hbar} px} \\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\pi\hbar} \frac{1}{\sqrt{e\epsilon}} e^{-\frac{ip}{\hbar e\epsilon} \left[\frac{p^2}{6m} - E\right]} \Psi'_p(x, 0)\end{aligned}$$