

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Hantian Zhang, Manuel Egner **WS 23/24 – Blatt 02**

Abgabe: Fr., 03.11.2023, 11:00 Uhr; Besprechung: Di., 07.11.2023

1 (*) Zerfall eines Tritiumkerns (5 Punkte)

Ein Tritiumkern (${}^3\text{H}$) verwandelt sich durch β -Zerfall in einem Heliumkern (${}^3\text{He}$). Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron, das sich im Grundzustand des Tritiumatoms befand, im $2s$ -Zustand des Heliumatoms gefunden wird.

2 (*) Magnetische Resonanz (5 Punkte)

Betrachten Sie ein Spin-1/2-Teilchen in einem Magnetfeld mit konstanter Komponente in z -Richtung und einer mit Frequenz ω in der xy -Ebene rotierenden Komponente. Der Hamilton-Operator für dieses System lautet:

$$\begin{aligned} H(t) &= H_0 + V(t), \\ H_0 &= \omega_0 S_z, \\ V(t) &= \omega_1 \cos(\omega t) S_x + \omega_1 \sin(\omega t) S_y, \end{aligned}$$

wobei S_i mit $i = x, y, z$ die Komponenten des Spin-Operators bezeichnet.

1. [1pt.] Bestimmen Sie den Hamilton-Operator $H_I(t)$, der die Dynamik im Wechselwirkungsbild charakterisiert.
2. [2pt.] Bestimmen Sie den zeitabhängigen Erwartungswert $\langle \vec{S} \rangle(t)$ für den Fall $\omega = \omega_0$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das System im Grundzustand von H_0 .
3. [2pt.] Für die allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung erweist es sich als vorteilhaft, eine andere Aufteilung des Hamilton-Operators zu wählen:

$$\begin{aligned} H(t) &= H'_0 + V'(t), \\ H'_0 &= \omega S_z, \\ V'(t) &= (\omega_0 - \omega) S_z + V(t). \end{aligned}$$

Im Wechselwirkungsbild lautet dann der Hamilton-Operator

$$V'_I(t) = e^{iH'_0 t/\hbar} V'(t) e^{-iH'_0 t/\hbar}.$$

Bestimmen Sie nun den Erwartungswert $\langle S_z \rangle(t)$ für beliebiges ω , wobei sich das System zum Zeitpunkt $t = 0$ wieder im Grundzustand von H_0 befindet.

3 Harmonischer Oszillator: zeitabhängige Störung

Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator mit dem Hamiltonoperator

$$H_0 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2},$$

der sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in seinem Grundzustand befindet. Dieses System sei der zeitabhängigen Störung

$$H' = \begin{cases} 0 & t < 0 \text{ und } t > T \\ \lambda x (1 - t/T) & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

ausgesetzt.

1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System nach der Zeit $t > T$ im ersten angeregten Zustand befindet, bis zur ersten Ordnung in λ .
2. Betrachten Sie nun den Fall $\omega T \gg 1$. Zeigen Sie, dass die oben berechnete Wahrscheinlichkeit in diesem Limit dem Wert $|\langle \psi_1 | \psi'_0 \rangle|^2$ entspricht, wobei $|\psi'_0\rangle$ dem Grundzustand des Hamiltonoperators $H_0 + \lambda x$ entspricht.