

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Hantian Zhang, Manuel Egner **WS 23/24 – Blatt 03**

Abgabe: Fr., 10.11.2023, 11:00 Uhr; Besprechung: Di., 14.11.2023

1 (*) Fermis Goldene Regel (5 Punkte)

Ein Teilchen befinde sich in einem eindimensionalen Potential, beschrieben durch

$$V(x) = -V_0 \Theta(d/2 - |x|),$$

wobei $V_0 > 0$. Der Potentialtopf sei so tief, dass die Grundzustandsenergie des Teilchens sehr klein ist im Vergleich zu der Energie, die es benötigen würde um den Potentialtopf zu verlassen: $\hbar^2 \pi^2 / (2md^2) \ll V_0$.

Betrachten Sie nun eine zeitabhängige Störung $H' = V \delta(x) \cos \omega t$ zu dem oben beschriebenen Potential. Bestimmen Sie die Übergangsrate vom Grundzustand in das Kontinuum aufgrund von H' in erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie. Benutzen Sie dafür Fermis Goldene Regel.

Hinweis: Die Wellenfunktion für das Teilchen in einem unendlich tiefen Potentialtopf ist gegeben durch

$$|\phi_0(x)\rangle = \sqrt{\frac{2}{d}} \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right),$$

für $|x| \leq d/2$, was dem Anfangszustand entspricht. Im Kontinuum, dem Endzustand, gilt für die Wellenfunktion des Teilchens

$$|\psi_f(x)\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp(ikx),$$

wobei L eine Länge ist, die zur Normierung der Wellenfunktion eingeführt wird.

2 (*) Zweizustandssystem mit zeitabhängiger Störung (5 Punkte)

Ein Zweizustandssystem im zeitlich harmonischen äußeren Potential wird durch folgenden Hamilton-Operator beschrieben

$$H = H_0 + V(t),$$

wobei H_0 den ungestörten Hamilton-Operator bezeichnet:

$$H_0|1\rangle = E_1|1\rangle, \quad H_0|2\rangle = E_2|2\rangle, \quad \text{mit} \quad E_2 > E_1.$$

Der Störoperator im Raum der ungestörten Eigenzustände $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ ist gegeben durch

$$V(t) = \lambda \begin{pmatrix} 0 & e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix}.$$

1. [3pt.] Lösen Sie die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung $i\hbar\partial|\Psi(t)\rangle/\partial t = H|\Psi(t)\rangle$ für die Anfangsbedingung $|\Psi(t=0)\rangle = |1\rangle$. Dabei erhalten Sie ein System von gekoppelten Differentialgleichungen für die Koeffizienten $c_n(t) = \langle n|\Psi(t)\rangle$, $n = 1, 2$, das exakt gelöst werden kann.
 2. [2pt.] Benutzen Sie nun Störungstheorie in niederster, nicht-trivialer Ordnung, um die Koeffizienten $c_n(t)$, $n = 1, 2$, zu berechnen. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der exakten Lösung von Aufgabenteil 1 für kleine Werte von λ . Betrachten Sie dabei folgende Fälle separat:
 - (a) $\omega \approx \omega_{21}$ mit $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$;
 - (b) $\omega \gg \omega_{21}$ bzw. $\omega \ll \omega_{21}$.
-

3 Kommutatorrelationen

Überprüfen Sie die Kommutatorrelation für den Drehimpulsoperator $\vec{L}$ und den Ortsoperator $\vec{r}$

$$[\vec{L}^2, [\vec{L}^2, \vec{r}]] = 2\hbar^2\{\vec{L}^2, \vec{r}\}.$$

Berechnen Sie dazu die Kommutatoren $[\vec{L}^2, x_i]$, wobei x_i eine Komponente des Ortsoperators bezeichnet.
