Moderne Theoretische Physik II
(Quantenmechanik II und Statistik)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. Matthias Steinhauser, Dr. Hantian Zhang, Manuel Egner **WS 23/24 – Blatt 04**

Abgabe: Fr., 17.11.2023, 11:30 Uhr; Besprechung: Di., 21.11.2023

---

1 (*) Wasserstoffatom im elektrischen Feld (4 Punkte)

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom in einem homogenen elektrischen Feld $\vec{E}(t)$, das entlang der z-Richtung liegt. Die Amplitude betrage $E(t) = A\tau/(\tau^2 + t^2)$, wobei A und τ vorgegebene Konstanten sind. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P für den Übergang des Elektrons aus dem Grundzustand (bei $t \to -\infty$) in den $2P$-Zustand (bei $t \to +\infty$).
Hinweis:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, \frac{e^{i\omega x}}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{a} e^{-|\omega| a} \, .$$

---

2 (*) Lebensdauer für Dipolübergang (6 Punkte)

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom, wobei sich das Elektron in einem $2P$-Zustand mit $m = 0, +1$ oder -1 befindet. Mit Hilfe der zeitabhängigen Störungstheorie erster Ordnung erhält man für die Übergangsrate in den $1S$-Zustand (in SI-Einheiten)

$$\frac{d\Gamma_{2P \to 1S, \vec{k}\lambda}}{d\Omega} = \frac{\alpha}{2\pi c^2} \omega^3 |\vec{d}_{2P,1S} \cdot \vec{\epsilon}^{\,*}_{\vec{k}\lambda}|^2 \, ,$$

wobei $\vec{k}$ und λ Wellenzahl und Polarisation des Photons sind und sich ω aus der Energiedifferenz zwischen dem $2P$- und $1S$-Niveau ergibt.

1. Summieren Sie über beide Polarisationszustände und integrieren Sie über den Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega$ (des Vektors $\vec{k}$), um die Lebensdauer in Abhängigkeit vom Betrag des Dipolmatrixelements $|\vec{d}_{2P,1S}|$ zu bekommen.
2. Berechnen Sie das Dipolmatrixelement $\vec{d}_{2P,1S}$ und drücken Sie die Lebensdauer τ durch α, m_e, c und $\hbar$ aus.
3. Werten Sie τ numerisch aus. Numerische Werte für die Konstanten finden Sie auf der Webseite `https://pdg.lbl.gov/2023/reviews/contents_sports.html`

---

3 Hamilton-Operator des freien Strahlungsfeldes

Der Hamilton-Operator des freien Strahlungsfeldes in einem endlichen Volumen V ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
H_{\mathrm{rad}} &= \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int \mathrm{d}^3 r \left(\frac{\vec{E}^{\,2}}{c^2} + \vec{B}^{\,2} \right) \\
&= \frac{V \epsilon_0 c^2}{2} \sum_{\vec{k}} \left(\frac{1}{c^2} |\dot{\vec{A}}_{\vec{k}}(t)|^2 + |\vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}}(t)|^2 \right) , \qquad (1)
\end{aligned}
$$

wobei $\vec{A}_{\vec{k}}(t)$ aus Gl. (2) (siehe unten) extrahiert werden kann. Zeigen Sie, dass Gl. (1) in folgender Form geschrieben werden kann

$$
H_{\mathrm{rad}} = \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar c k \left(\vec{a}^{\dagger}_{\vec{k},\lambda} \vec{a}_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2} \right) ,
$$

wobei $\vec{k}$ den Wellenvektor und λ die Polarization bezeichnet. Das Vektorpotential ist dabei gegeben durch (mit $\omega_k = kc$)

$$
\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2kcV\varepsilon_0}} \left(a_{\vec{k},\lambda} \vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} + a^{\dagger}_{\vec{k},\lambda} \vec{\varepsilon}^{\,\star}_{\vec{k},\lambda} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right) , \qquad (2)
$$

wobei $a_{\vec{k},\lambda}$ und $a^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}$ die Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren sind. Es gilt

$$
[a_{\vec{k},\lambda}, a^{\dagger}_{\vec{k}',\lambda'}] = \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{\lambda,\lambda'} , \quad [a_{\vec{k},\lambda}, a_{\vec{k}',\lambda'}] = 0 , \quad \text{und} \quad [a^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}, a^{\dagger}_{\vec{k}',\lambda'}] = 0 .
$$

Hinweis: O.B.d.A. kann man Polarisationsvektoren wählen, so dass gilt $\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda} = \vec{\varepsilon}_{-\vec{k},\lambda}$.